TRƯỜNG THPT ĐÔNG HÀ
TỔ TOÁN
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11
NĂM HỌC 2020 - 2021
Môn: TOÁN
Thời gian: **180 phút** *(Không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi: 15 /4/2021

Câu 1. (5,0 điểm).

1. Tìm số nguyên dương n biết rằng:

$$C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+C_{2n+1}^{5}+...+C_{2n+1}^{2n+1}=1024.$$

2. Một trường có 50 học sinh giỏi, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh trong số 50 học sinh để tham gia trại hè. Tính xác suất để 3 em được chọn không có cặp anh em sinh đôi.

Câu 2. (2,0 điểm). Giải phương trình $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=2\sqrt{2}$.

Câu 3. (5,0 điểm).

1. Cho ba số $a>0,\ b>0,\ c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2+3}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2+3}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2+3}}\geq\frac{3}{2}.$$

2. Chứng minh dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{n^2}$ là một dãy số tăng và bị chặn.

Câu 4. (2,0 điểm). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{1+x^2+y^2+2y}+\sqrt{9+x^2+y^2-6y}$$

trong đó $x,\ y$ là các số thực thỏa mãn $x=\dfrac{y}{2}+1$.

Câu 5. (6,0 điểm).

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a,\ AD=2a$, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$, M là trung điểm của CD.

a) Tính góc giữa SM và mp(SAB).

b) Tính theo a khoảng cách từ A đến mp (SBM)

2. Cho M,N,P lần lượt là trung điểm của ba cạnh $BC,\ CA,\ AB$ của ΔABC. Gọi H,G,O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMNP. Chứng minh H,G,O,I thẳng hàng.

.........**HẾT**........

Họ và tên:.. **Lớp:**.........**SBD:**......

Đề thi gồm 1 trang

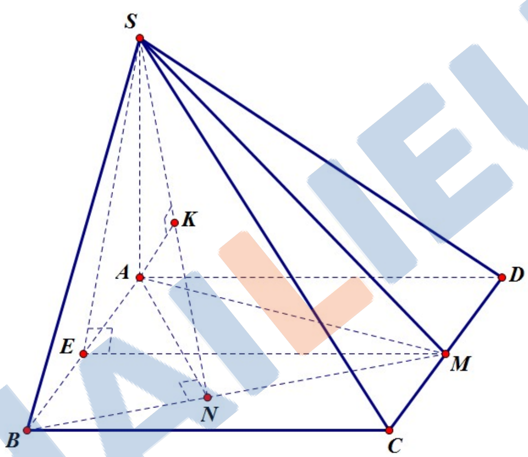
HƯỚNG DẪN CHẤM

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA LỚP 11 THPT NĂM HỌC 2020-2021.

MÔN TOÁN

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1.1 **(2 điểm)**	+Xét khai triển $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x^1 + C_{2n+1}^2 x^2 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1} (1)$ $(1-x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 x^1 + C_{2n+1}^2 x^2 + ... - C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1} (2)$ +Trừ từng vế (1), (2) ta có $(1+x)^{2n+1} - (1-x)^{2n+1} = 2(C_{2n+1}^1 x^1 + C_{2n+1}^3 x^3 + C_{2n+1}^5 x^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1})$ (3) +Thay $x=1$ vào (3) rồi chia hai vế cho 2 ta có $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + ... + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n}$ +Suy ra $2^{2n} = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5$	**0.5** **0.5** **0.5** **0.5**
Câu 1.2 **(3 điểm)**	+Số cách chọn 3 học sinh bất kì từ 50 học sinh là $C_{50}^3 \Rightarrow \lvert\Omega\rvert = C_{50}^3 = 19600$ +Số cách chọn 3 học sinh trong đó có 1 cặp anh em sinh đôi là 4.48 Gọi biến cố A: "Chọn được 3 học sinh không có cặp anh em sinh đôi" +Ta có $\lvert\Omega_A\rvert = C_{50}^3 - 4.48 = 19408$ + $P(A) = \frac{\lvert\Omega_A\rvert}{\lvert\Omega\rvert} = \frac{19408}{19600} = \frac{1213}{1225}$	**1** **0,5** **1** **0.5**
Câu 2 **(2 điểm)**	+Điều kiện $\lvert x\rvert > 1 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 1$ $x < -1 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm +Xét $x > 1$: Đặt $x = \frac{1}{\cos t}, t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ Ta có phương trình $\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin t + \cos t = 2\sqrt{2}\sin t \cos t$ $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin 2t \Leftrightarrow \sin 2t = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$	**0.5** **1**

	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2t=\pi+\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ 2t=\pi-\left(\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ t=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in Z)$ + $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow x=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$ thỏa $x>1$ Vậy nghiệm của phương trình là $x=\sqrt{2}$	**0.5**
Câu 3.1 **(3 điểm)**	+Ta có $\dfrac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\dfrac{a^3}{2\sqrt{b^2+3}}+\dfrac{b^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{a^6}{64}}=\dfrac{3}{4}a^2(1)$ $\dfrac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}}+\dfrac{b^3}{2\sqrt{c^2+3}}+\dfrac{c^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{b^6}{64}}=\dfrac{3}{4}b^2(2)$ $\dfrac{c^3}{2\sqrt{a^2+3}}+\dfrac{c^3}{2\sqrt{a^2+3}}+\dfrac{a^2+3}{16}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{c^6}{64}}=\dfrac{3}{4}c^2(3)$ +Cộng (1), (2), (3) vế theo vế ta có $P+\dfrac{a^2+b^2+c^2+9}{16}\geq\dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ $\Leftrightarrow P+\dfrac{12}{16}\geq\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow P\geq\dfrac{9}{4}-\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{2}$ Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$	**1.5** **1.5**
Câu 3.2 **(2 điểm)**	Ta có $\forall n\in N^*: u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{(n+1)^2}\Rightarrow u_{n+1}>u_n,\forall n\in N^*$ $\Rightarrow$ Dãy (u_n) tăng (u_n) tăng $\Rightarrow u_n\geq u_1=1,\forall n\in N^*$ $u_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{n^2}<1+\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{(n-1).n}$ $=1+\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+...+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)=2-\dfrac{1}{n}<2$ $\Rightarrow 1\leq u_n<2,\forall n\in N^*$ $\Rightarrow (u_n)$ bị chặn	**0.5** **0.25** **1.0** **0.25**

Câu 4 **(2 điểm)**	+Ta có $P=\sqrt{x^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}$ Đường thẳng $\Delta: 2x-y-2=0$ +Lấy $M(x;y)\in\Delta$, hai điểm $A(0;-1), B(0;3)$ $\Rightarrow P=AM+BM$ A, B nằm cùng phía đối với Δ, lấy A’ đối xứng với A qua Δ $\Rightarrow A'\left(\frac{4}{5};-\frac{7}{5}\right), MA'=MA$ $+P=AM+BM=A'M+BM\geq A'B=2\sqrt{5}$ $+\min P=2\sqrt{5}$ khi A’, B, M thẳng hàng Khi $M=A'B\cap\Delta\Rightarrow M\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ Vậy $\min P=2\sqrt{5}$ khi $x=\frac{2}{3};y=-\frac{2}{3}$	**0.5** **0.5** **0.5** **0.5**
Câu 5.1 **(4 điểm)**	 a) +Gọi E là trung điểm AB $\Rightarrow\begin{cases} ME//AD \\ AD\perp(SAB)\end{cases}\Rightarrow ME\perp(SAB)$ $\Rightarrow$Góc giữa SM và (SAB) là góc $\varphi=\widehat{MSE}$ $(0^0<\varphi<90^0)$ +Tính $\tan\varphi$: $ME=AD=2a$ $SE=\sqrt{AS^2+AE^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow\tan\varphi=\tan\widehat{MSE}=\frac{ME}{SE}=\frac{2a}{a\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$	**1** **1**

	b. + $AN \perp BM \Rightarrow (SAN) \perp (SBM)$ Kẻ $AK \perp SN \Rightarrow AK \perp (SBM)$ $AK = d(A,(SBM))$ +Tính $AK: S_{\Delta ABM} = S_{ABCD} - (S_{\Delta ADM} + S_{\Delta BCM})$ $= S_{ABCD} - 2S_{\Delta ADM} = 2a^2 - a^2 = a^2$ $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}AN.BM \Rightarrow AN = \frac{2S_{\Delta ABM}}{BM} = \frac{2a^2}{\sqrt{BC^2 + BM^2}}$ $= \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{4a}{\sqrt{17}}$ + $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} \Rightarrow AK = \frac{4a}{\sqrt{33}} \Rightarrow d(A,(SBM)) = AK = \frac{4a}{\sqrt{33}}$	**0.5** **0,5** **0.5** 0,5
Câu 5.2 **(2 điểm)**	+ $V_{(G,-\frac{1}{2})}: \Delta ABC \to \Delta MNP$ +Ta có $\begin{cases} PN // BC \\ MO \perp BC \end{cases} \Rightarrow MO \perp PN$ Tương tự $NO \perp PM$ $\Rightarrow$ O là trực tâm tam giác *MNP* + $V_{(G,-\frac{1}{2})}: H \to O \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH} \Rightarrow H,G,O$ thẳng hàng + $V_{(G,-\frac{1}{2})}: O \to I \Rightarrow \overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO} \Rightarrow I,G,O$ thẳng hàng Vậy H,G,O,I thẳng hàng.	**0.5** **0.5** **0.5** **0.5**

.........**HẾT**........

Đề thi gồm 1 trang