

Bài I. (5,0 điểm)

1) Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $(2x-1)^4 = (ax+b)^4 + (x^2+cx+d)^2$ với mọi giá trị của $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a+2b+3c+4d$.

2) Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = x^2 - 2x + 3$.

Bài II. (5,0 điểm)

1) Cho $P(x)$ là đa thức bậc bốn và có hệ số của bậc cao nhất là 1. Biết rằng $P(1)=2, P(2)=3, P(3)=4, P(4)=5$. Chứng minh rằng $P(5)$ là một số tự nhiên và chia hết cho 5.

2) Cho a, b là các số nguyên dương sao cho $a+b^3$ chia hết cho $a^2+3ab+3b^2-1$. Chứng minh rằng $a^2+3ab+3b^2-1$ chia hết cho lập phương của một số nguyên lớn hơn 1.

Bài III. (2,0 điểm) Với các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{9}{4abc} = \frac{3}{4}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

Bài IV. (6,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) ngoại tiếp (I) . Các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Đường thẳng NP cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại Q, R .

1) Chứng minh rằng tam giác AQB vuông và B, I, Q thẳng hàng.

2) Gọi H là trực tâm của tam giác ARQ . Chứng minh rằng $\widehat{HAR} = \widehat{QAI}$.

3) Chứng minh rằng H, I, M thẳng hàng.

Bài V. (2,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số nguyên dương lẻ sao cho chúng nguyên tố cùng nhau và $\frac{a^2+b^2-c^2}{a+b-c}, \frac{b^2+c^2-a^2}{b+c-a}, \frac{c^2+a^2-b^2}{c+a-b}$ đều là các số nguyên. Chứng minh rằng $|(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)|$ là số chính phương.

2) Mỗi ô vuông của lưới vuông 10×10 được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ sao cho tại mỗi ô có màu xanh thì tổng số các ô màu đỏ ở hàng và cột chứa ô màu xanh đó không nhỏ hơn 10.

a) Đưa ra một cách tô thỏa mãn số ô màu xanh và số ô màu đỏ đều là 50.

b) Chứng minh với mọi cách tô thỏa mãn điều kiện trên, số ô màu xanh luôn không lớn hơn số ô màu đỏ.