

Câu 1 (3,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x+1}{x^2-2x+1} \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$ với $x \neq 0$ và $x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức P?
- Tìm các giá trị nguyên của x để P có giá trị nguyên.

Câu 2 (4,0 điểm)

1 Tìm x biết $\left(\frac{1}{2}x-5\right)^3 + \left(\frac{1}{2}x+7\right)^3 = (x+2)^2$

2 Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $x^2 - 4xy + 3y^2 = 2(x-y)+1$

Câu 3 (3,0 điểm)

Cho ba số thực a, b, c khác 0 và khác nhau đôi một, thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

a) Chứng minh rằng: $a^2 + 2bc = (a-b)(a-c)$.

b) Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{a^2+bc}{a^2+2bc} + \frac{b^2+ac}{b^2+2ac} + \frac{c^2+ab}{c^2+2ab^2}$.

Câu 4 (2,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = 32(a^2 + b^2) - 36ab - 8(a + b) + 2030$.

Câu 5 (6,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia CD lấy điểm M bất kì ($CM < CD$). Vẽ hình vuông CMNP (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H, MP cắt BD tại K.

a) Chứng minh $\widehat{PDC} = \widehat{MBC}$ và $DH \perp BM$

b) Chứng minh A, H, N thẳng hàng.

c) Tính $Q = 2021 \left(\frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{KP}{MK} \right) + 2022$.

Câu 6 (2,0 điểm)

1 Chứng minh $f(x) = (x^2 + x - 1)^{12} + (x^2 - x + 1)^{10} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$.

2 Để đảm bảo công tác phòng chống dịch Covid 19 trên địa bàn UBND huyện Nam Trực đã thành lập 17 chốt kiểm soát phòng chống Covid 19. Biết rằng 17 chốt, chốt nào cũng liên lạc được với mọi chốt khác bởi một và chỉ một trong ba cách: gọi điện thoại, qua zalo hoặc qua messenger. Chứng minh rằng tồn tại ba chốt có thể liên lạc được với nhau với cùng 1 trong 3 hình thức trên.