

Câu 1. (4,0 điểm)

a, Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot [\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3}]}{2-\sqrt{1-x^2}}$

b, Tính giá trị biểu thức: $B = (x^5 - 5x^3 - 6x^2 - 6x - 7)^{2021}$ tại $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

c, Tìm x để $x+4\sqrt{3}$ và $\frac{1}{x}-4\sqrt{3}$ đều là số nguyên.

Câu 2. (5,0 điểm)

a, Giải các phương trình sau: 1, $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x^2} = 3$

2, $x^2 + 7x + 2 = 2(x+1)\sqrt{3x+1} + 2\sqrt{2x-1}$

b, Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$

c, Cho hàm số $y = x - 2m - 1$ (m là tham số) có đồ thị cắt trục Ox, Oy theo thứ tự tại hai điểm A, B . H là hình chiếu của O trên đường thẳng AB . Tìm giá trị của tham số m để $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a, Xác định a, b để đa thức $f(x) = x^{100} + ax^2 + bx + 2$ chia hết cho đa thức $x^2 - 1$

b, 1, Chứng minh rằng với mọi số dương x, y thì:

$$(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$$

2, Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z} + \frac{9}{4}$$

Câu 4. (7,0 điểm)

1. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn vẽ tia Ax vuông góc với AB . C là một điểm bất kỳ trên nửa đường tròn (C khác A , khác B). Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại F và cắt tia Ax tại M . BM cắt nửa đường tròn tại D .

a, Chứng minh rằng MC là tiếp tuyến của $(O; R)$

b, Giả sử $R = 3$ cm, $AM = \sqrt{3}$ cm. Tính diện tích tam giác MDF .

2. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a , M là một điểm nằm bên trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh AB, BC, CA . Tìm vị trí điểm M để biểu thức: $\frac{1}{MD+ME} + \frac{1}{ME+MF} + \frac{1}{MF+MD}$ có giá trị nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó theo a .