

Câu I (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ thỏa mãn điều kiện $a > 0; b > 0; a \neq b$

Hãy tính giá trị của biểu thức Q với $a = \sqrt{\sqrt{2021} + 2\sqrt{505}}$; $b = \sqrt{\sqrt{2021} - 2\sqrt{505}}$

2) Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m - 4 = 0$ (m là tham số, x là ẩn số)

a. Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

b. Đặt $P = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$. Tìm m để $P = 18$.

Câu II (4,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 16} = 1$

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65 \\ x^2y + xy^2 = 20 \end{cases}$

Câu III (4,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^2y^2(y - x) = 5xy^2 - 27$.

2) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$

Câu IV (6,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và dây BC cố định (BC không phải là đường kính). Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi E là điểm đối xứng của B qua đường thẳng AC và F là điểm đối xứng của C qua đường thẳng AB. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EC và FB, H là giao điểm của hai đường thẳng BE và CF.

a) Chứng minh FAHB và ACKF là các tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh KA là phân giác của góc BKC và ba điểm K, O, A thẳng hàng.

c) Xác định vị trí của điểm A sao cho tứ giác BKCO có diện tích lớn nhất.

Câu V (2,0 điểm)

1. Cho 16 số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 2021 đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh trong 16 số trên có ít nhất một số là số nguyên tố.

2. Cho 8045 điểm trên một mặt phẳng sao cho cứ 3 điểm bất kì thì tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng: Luôn có thể có ít nhất 2012 điểm nằm trong tam giác hoặc trên cạnh của một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1