Nội dung bài viết

1. Giải bài tập Toán Hình 12 Bài 3: Phương trình đường thẳng trong không gian
2. Lý thuyết Toán Hình lớp 12 Bài 3: Phương trình đường thẳng trong không gian

Giải bài tập Toán Hình 12 Bài 3: Phương trình đường thẳng trong không gian

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 3 trang 82: Trong không gian Oxyz cho điểm $M_o(1; 2; 3)$ và hai điểm $M_1(1 + t; 2 + t; 3 + t)$, $M_2(1 + 2t; 2 + 2t; 3 + 2t)$ di động với tham số t. Hãy chứng tỏ ba điểm M_o, M_1, M_2 luôn thẳng hàng.

Lời giải:

$\overrightarrow{M_oM_1} = (t;t;t)$; $\overrightarrow{M_oM_2} = (2t;2t;2t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{M_oM_2} = 2\overrightarrow{M_oM_1} \Rightarrow \overrightarrow{M_oM_1}$ và $\overrightarrow{M_oM_2}$ cùng phương

⇒ ba điểm M_o, M_1, M_2 luôn thẳng hàng

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 3 trang 84: Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 5 + 4t. \end{cases}$$

Hãy tìm tọa độ của một điểm M trên Δ và tọa độ một vecto chỉ phương của Δ.

Lời giải:

1 điểm M thuộc Δ là: M (-1; 3; 5) và 1 vecto chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{a} = (2;-3;4)$

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 3 trang 84: Cho hai đường thẳng d và d' có phương trình tham số lần lượt là

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 6 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = 1 - t' \\ z = 5 + 2t' \end{cases}$$

a) Hãy chứng tỏ điểm M(1; 2; 3) là điểm chung của d và d';

b) Hãy chứng tỏ d và d' có hai vecto chỉ phương không cùng phương.

Lời giải:

a) tọa độ M thỏa mãn phương trình tham số của d với t = -1

Tọa độ M thỏa mãn phương trình tham số của d' với t = -1

⇒ M là điểm chung của d và d'

b) $\overrightarrow{a_d}$ = (2;4;1); $\overrightarrow{a_{d'}}$ = (1;-1;2) là hai vecto không tỉ lệ nên hai veco đó không cùng phương

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 3 trang 86: Chứng minh hai đường thẳng sau đây trùng nhau:

$$d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = 5 + 3t' \\ z = 3 - 6t' \end{cases}$$

Lời giải:

$\overrightarrow{a_d}$ = (-1;1;-2); $\overrightarrow{a_{d'}}$ = (-3;3;-6) ⇒ $\overrightarrow{a_{d'}} = 3\overrightarrow{a_d}$

M (3; 4; 5) ∈ d và M (3; 4; 5) ∈ d'

Nên d trùng với d'

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 3 trang 89: Tìm số giao điểm của mặt phẳng (α): x + y + z - 3 = 0 với đường thẳng d trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{c) } d: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 1 - 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Lời giải:

a) Xét phương trình: (2 + t) + (3 - t) + 1 – 3 = 0

⇔ 3 = 0(vô nghiệm) ⇒ mặt phẳng (α)và d không có điểm chung

b) Xét phương trình: (1 + 2t) + (1 - t) + (1 - t) – 3 = 0

⇔ 0 = 0(vô số nghiệm) ⇒ d ∈ (α)

c) Xét phương trình: (1 + 5t) + (1 - 4t) + (1 + 3t) – 3 = 0

⇔ 4t = 0 ⇔ t = 0 ⇒ mặt phẳng (α)và d có 1 điểm chung

Bài 1 (trang 89 SGK Hình học 12): Viết phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp *sau*:

a) d đi qua M(5; 4; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$

b) d đi qua A(2; -1; 3) và vuông góc với mặt phẳng (α): x + y – z + 5 = 0.

c) d đi qua B(2; 0; -3) và song song với đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$

d) d đi qua hai điểm P(1; 2; 3) và Q(5; 4; 4).

Lời giải:

a) Ta có: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

b) Đường thẳng d vuông góc với mp(α) x + y – z + 5 = 0

nên đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{n}$ = (1; 1; -1)

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$

c)Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{a}$ = (2; 3; 4) (vì d // Δ).

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

d)Vectơ chỉ phương của d là $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ = (4; 2; 1)

(vì d đi qua hai điểm P(1; 2; 3), Q(5; 4; 4)

vậy phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Kiến thức áp dụng

+ Phương trình tham số của đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a_1; a_2; a_3)$ và đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

+ Hai đường thẳng (d) và (d’) song song nếu hai vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = k.\overrightarrow{u_{d'}}$

Bài 2 (trang 89 SGK Hình học 12): Viết phương trình tham số của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$ lần lượt trên các mặt phẳng:

a)Oxy b)Oyz

Lời giải:

+ t = 0 ⇒ điểm M(2; -3; 1) ∈ d

+ t = 1 ⇒ điểm N(3; -1; 4) ∈ d.

a) Hình chiếu của M trên (Oxy) là M’(2 ; -3 ; 0).

Hình chiếu của N trên (Oxy) là : N’(3 ; -1 ; 0).

⇒ Hình chiếu của d trên (Oxy) chính là đường thẳng d’ đi qua M’ và N’.

⇒ d’ nhận $\overrightarrow{M'N'} = (1;2;0)$ là 1 vtcp.

⇒ (d’): $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$

b) Hình chiếu của M trên (Oyz) là : $M_1(0 ; -3 ; 1)$

Hình chiếu của N trên (Oyz) là : $N_1(0 ; -1 ; 4)$

⇒ Hình chiếu của d trên (Oyz) chính là đường thẳng d_1 đi qua M_1 và N_1

⇒ d1 nhận $\overrightarrow{M_1N_1} = (0;2;3)$ là 1 vtcp

⇒ $(d_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

Kiến thức áp dụng

+ Các điểm thuộc đường thẳng (d): $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ đều có dạng M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)

+ Hình chiếu của M(x_0; y_0 ; z_0) trên (Oxy) là: M_1(x_0 ; y_0 ; 0)

trên (Oyz) là : M_2(0 ; y_0 ; z_0)

trên (Ozx) là : M_3(x_0 ; 0 ; z_0).

Bài 3 (trang 90 SGK Hình học 12): Xét vị trí tương đối các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình *sau*:

$$a)d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases} \qquad d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$$

$$c)d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$$

Lời giải:

a. Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} -3+2t=5+t';(1) \\ -2+3t=-1-4t';(2) \\ 6+4t=20+t';(3) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình với hai phương trình

(1) và (2) ta được: t= 3 và t'= -2.

Thay t= 3 và t'= -2 vào (3)

ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho

có nghiệm duy nhất là t = 3 và t'= -2

Do đó, hai đường thẳng đã cho

cắt nhau tại điểm A(3; 7; 18).

b. Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_1}$ (1;1; -1).

Đường thẳng d' có VTCP $\overrightarrow{u_2}$ (2; 2; -2)

Ta thấy: $\vec{u}_2 = 2\overrightarrow{u_1}$.

Lại có điểm A(1; 2; 3)$\in d$ nhưng $A \notin d'$.

Do đó, hai đường thẳng đã cho

song song với nhau.

Kiến thức áp dụng

Xét đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ có vtcp $\vec{u} = (a;b;c)$

và (d’) : $\begin{cases} x = x_0' + a't' \\ y = y_0' + b't' \\ z = z_0' + c't' \end{cases}$ có vtcp $\overrightarrow{u'} = (a';b';c')$

+ TH1 : $\vec{u} // \overrightarrow{u'} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

+ TH2: u→ không song song với u'→:

Nếu hệ $\begin{cases} x_0 + at = x_0' + a't' \\ y_0 + bt = y_0' + b't' \\ z_0 + ct = z_0' + c't' \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

⇒ (d) và (d’) cắt nhau.

Nếu hệ $\begin{cases} x_0 + at = x_0' + a't' \\ y_0 + bt = y_0' + b't' \\ z_0 + ct = z_0' + c't' \end{cases}$ vô nghiệm

⇒ (d) và (d’) chéo nhau.

Bài 4 (trang 90 SGK Hình học 12): Tìm a để hai đường thẳng *sau* đây cắt nhau:

$$d: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

$$d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

Lời giải:

Để hai đường thẳng d và d' cắt nhau thì hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + at = 1 - t' & (1) \\ t = 2 + 2t' & (2) \\ -1 + 2t = 3 - t' & (3) \end{cases}$$ phải có một nghiệm duy nhất

Giải hệ gồm hai phương trình (2) và (3) ta được $t = 2$ và $t' = 0$

Thay vào (1) ta được: $1 + 2a = 1 - 0 \Leftrightarrow a = 0$

Vậy d cắt d' khi $a = 0$.

Kiến thức áp dụng

Xét đường thẳng (d) : $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

và (d') : $\begin{cases} x = x_0' + a't' \\ y = y_0' + b't' \\ z = z_0' + c't' \end{cases}$

Nếu hệ $\begin{cases} x_0 + at = x_0' + a't' \\ y_0 + bt = y_0' + b't' \\ z_0 + ct = z_0' + c't' \end{cases}$

có nghiệm duy nhất.

$\Rightarrow$ (d) và (d') cắt nhau.

Bài 5 (trang 90 SGK Hình học 12): Xét vị trí tương đối của đường thẳng d với mặt phẳng (α) trong các trường hợp *sau*:

$$a)d:\begin{cases}x=12+4t\\y=9+3t\\z=1+t\end{cases}\qquad (\alpha): 3x+5y-z-2=0$$

$$b)d:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=1+2t\end{cases}\qquad (\alpha): x+3y+z+1=0$$

$$c)d:\begin{cases}x=1+t\\y=1+2t\\z=2-3t\end{cases}\qquad (\alpha): x+y+z-4=0$$

Lời giải:

a) Giao điểm (nếu có) của đường thẳng (d) và mp(α) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=12+4t;(1)\\y=9+3t;(2)\\z=1+t;(3)\\3x+5y-z-2=0;(4)\end{cases}$$

Thay (1); (2); (3) vào (4) ta được:

3(12 + 4t) + 5(9 + 3t) – (1 + t) – 2 = 0

⇔ 36 + 12t + 45 + 15t – 1 – t – 2 = 0

⇔ 26t + 78 = 0

⇔ t = -3

Vậy (d) cắt (α) tại một điểm M(0 ; 0 ; -2).

b) Giao điểm (nếu có) của đường thẳng (d) và mp(α) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=1+t;(1)\\y=2-t;(2)\\z=1+2t;(3)\\x+3y+z+1=0;(4)\end{cases}$$

Thay (1); (2); (3) vào (4) ta được:

1 + t + 3(2 – t) + 1 + 2t + 1 = 0

⇔ 0t + 9 = 0

Phương trình vô nghiệm

⇒ (d) không cắt (α).

c) Giao điểm (nếu có) của đường thẳng (d) và mp(α) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t; (1) \\ y = 1 + 2t; (2) \\ z = 2 - 3t; (3) \\ x + y + z - 4 = 0; (4) \end{cases}$$

Thay (1); (2); (3) vào (4) ta được:

1 + t + 1 + 2t + 2 – 3t – 4 = 0

⇔ 0t = 0

Phương trình có vô số nghiệm

⇒ (d) ⊂ (α)

hay (d) cắt (α) tại vô số điểm.

Kiến thức áp dụng

+ Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0 và đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

Xét phương trình $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0$ (1)

+ Nếu (1) vô nghiệm ⇒ (d) không có điểm chung với (α) ⇒ d // (α).

+ Nếu (1) có 1 nghiệm $t = t_0$ thì (d) cắt (α) tại M $(x_0 + at_0; y_0 + bt_0; z_0 + ct_0)$.

+ Nếu (1) có vô số nghiệm thì (d) thuộc (α).

Bài 6 (trang 90 SGK Hình học 12): Tính khoảng cách giữa đường thẳng ...

Tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ :

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$ và mặt phẳng (α): $2x - 2y + z + 3 = 0$.

Lời giải:

Xét phương trình:

2(-3 + 2t) – 2(-1 + 3t) + (-1 + 2t) + 3 = 0

⇔ 0t – 2 = 0

Phương trình vô nghiệm

⇒ (Δ) // (α).

Điểm A(-3; -1; -1) ∈ (Δ).

⇒ d(Δ; α) = d(A; α)

$$= \frac{|2.(-3) - 2.(-1) + (-1) + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$$

Kiến thức áp dụng

+ Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0 và đường thẳng d: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

Xét phương trình $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0$ (1)

+ Nếu (1) vô nghiệm ⇒ (d) không có điểm chung với (α) ⇒ d // (α).

+ Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến (α) là:

$$d(M;\alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Bài 7 (trang 91 SGK Hình học 12): Cho điểm A(1; 0; 0) và đường thẳng ...

Cho điểm A(1; 0; 0) và đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$

a)Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ.

b)Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ.

Lời giải:

a) Cho H(2 + t; 1 + 2t; t) ∈ Δ. Ta có: $\overrightarrow{AH} = (1 + t; 1 + 2t; t)$

đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; 1)$

Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ nên AH ⊥ Δ ⇔ $\overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0$

⇔ 1+t +2(1+ 2t) + t = 0

$\Leftrightarrow 6t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow H\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$

b) Vì A' là điểm đốixứng xủa A qua Δ nên H là trung điểm của AA'

Khi đó $\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 2 \\ y_{A'} = 2y_A - y_A = 0 \\ z_{A'} = 2z_H - y_A = -1 \end{cases}$

Vậy A'(2; 0; -1)

Kiến thức áp dụng

Cách tìm hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng (Δ): $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

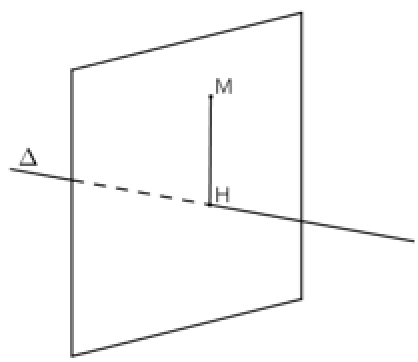
Cách 1:

+ Tham số hóa tọa độ điểm H(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct).

Từ $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0$ ⇒ tìm được t

⇒ Thay vào tọa độ điểm H ta tìm được hình chiếu của M trên (Δ).

Cách 2:



Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với đường thẳng (Δ)

⇒ (α) nhận $\overrightarrow{u_\Delta}$ là 1 vtpt

Hình chiếu H chính là giao điểm của đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α).

Bài 8 (trang 91 SGK Hình học 12): Cho điểm M(1; 4; 2) và mặt phẳng (α): x + y + z – 1 = 0

a)Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α).

b)Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α).

c)Tính khoảng cách từ M đến mp(α).

Lời giải:

a) Đường thẳng MH vuông góc với (α)

⇒ MH nhận vtpt của (α) $\overrightarrow{n_\alpha} = (1;1;1)$ là 1 vtcp

Mà M(1; 4; 2) ∈ MH

⇒ Pt đường thẳng MH: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$

⇒ H(1 + t; 4 + t; 2 + t).

H ∈ (α) ⇒ 1 + t + 4 + t + 2 + t – 1 = 0 ⇔ t = -2.

⇒ H(-1; 2; 0).

b) M’ đối xứng với M qua (α)

⇒ H là trung điểm MM’

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M = -3 \\ y_{M'} = 2y_H - y_M = 0 \\ z_{M'} = 2z_H - z_M = -2 \end{cases}$$

⇒ M’(-3; 0; -2).

c) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) là:

$$d = \frac{|1 + 4 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Kiến thức áp dụng

+ Tìm hình chiếu H của điểm M trên mặt phẳng (Δ): Ax + By + Cz + D = 0

Phương trình đường thẳng MH đi qua M và vuông góc với Δ

⇒ MH nhận vtpt của Δ là (A; B; C) là 1 vtpt

⇒ viết phương trình MH.

⇒ tìm tọa độ H là giao điểm của MH và (Δ).

+ Khoảng cách từ M(x0 ; y0 ; z0) đến (Δ): Ax + By + Cz + D = 0

$$d(M;\Delta)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Bài 9 (trang 91 SGK Hình học 12): Cho hai đường thẳng d:

Cho hai đường thẳng d: $\begin{cases} x=1-t \\ y=2+2t \\ z=3t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-2t \\ z=1 \end{cases}$

Chứng minh d và d' chéo nhau.

Lời giải:

Đường thẳng d có VTCP là: $\overrightarrow{u_1}$ (-1; 2;3).

Đường thẳng d' có VTCP là: $\overrightarrow{u_2}$ (1; -2; 0)

=> Hai vecto $\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương . (1)

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 1-t=1+t' \\ 2+2t=3-2t' \\ 3t=1 \end{cases}$

Hệ phương trình trên vô nghiệm. (2)

Từ (1) và (2)

⇨ hai đường thẳng đã cho chéo nhau.

Kiến thức áp dụng

Xét đường thẳng (d) : $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$ có vtcp $\vec{u}=(a;b;c)$

và (d’) : $\begin{cases} x = x_0' + a't' \\ y = y_0' + b't' \\ z = z_0' + c't' \end{cases}$ có vtcp $\overrightarrow{u'} = (a';b';c')$

+ TH1 : $\vec{u} // \overrightarrow{u'} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

+ TH2: u→ không song song với u'→:

Nếu hệ $\begin{cases} x_0 + at = x_0' + a't' \\ y_0 + bt = y_0' + b't' \\ z_0 + ct = z_0' + c't' \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

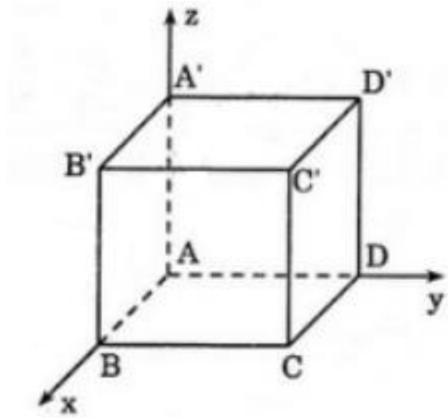
⇒ (d) và (d’) cắt nhau.

Nếu hệ $\begin{cases} x_0 + at = x_0' + a't' \\ y_0 + bt = y_0' + b't' \\ z_0 + ct = z_0' + c't' \end{cases}$ vô nghiệm

⇒ (d) và (d’) chéo nhau.

Bài 10 (trang 91 SGK Hình học 12): Giải bài toán *sau* đây bằng phương *pháp* tọa độ. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến các mặt phẳng (A'BD) và (B'D'C).

Lời giải:



Đặt hình lập phương ABCD.A'B'C'D' vào hệ trục Oxyz

sao cho O(0; 0; 0) ≡ A;

$\vec{i} = \vec{AB}$, $\vec{j} = \vec{AD}$, $\vec{k} = \vec{AA'}$

Ta có tọa độ của các điểm như sau: A(0; 0; 0), B(1; 0; 0),

C(1; 1; 0), D(0; 1; 0), A'(0; 0; 1),

B'(1; 0; 1), D'(0; 1; 1)

*Phương trình của mp(A'BD) là:

$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1$ hay $x + y + z - 1 = 0$

Vậy d(A, mp(A'BD)) = $\frac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

*mp(B'D'C) // mp(A'BD) vì (B'C // A'D và D'C // A'B)

nên phương trình của mp(B'D'C) có dạng $x + y + z + D = 0$ $(D \neq -1)$

Mp(B'D'C) đi qua điểm C(1; 1; 0) ⇔ D = - 2

Suy ra phương trình của mp(B'D'C) là : $x + y + z - 2 = 0$

Vậy d(A, mp(B'D'C)) = $\frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Kiến thức áp dụng

+ Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng cắt các trục Ox ; Oy ; Oz lần lượt tại (a ; 0 ; 0) ; (0 ; b ; 0) ; (0 ; 0 ; c) là : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

+ Khoảng cách từ M(x0 ; y0 ; z0) đến (Δ): Ax + By + Cz + D = 0

$$d(M;\Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Lý thuyết Toán Hình lớp 12 Bài 3: Phương trình đường thẳng trong không gian

A. Tóm tắt lý thuyết

I. Phương trình đường thẳng:

• Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và nhận vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ làm vectơ chỉ phương. Khi đó Δ có phương trình tham số là :

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t; \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + a_2 t \end{cases}$$

• Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và nhận vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ sao cho $a_1a_2a_3 \neq 0$ làm vectơ chỉ phương. Khi đó Δ có phương trình chính tắc là :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

II. Góc:

1. Góc giữa hai đường thẳng:

Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{a_1}$

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{a_2}$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Ta có:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\left|\vec{a_1}.\vec{a_2}\right|}{\left|\vec{a_1}\right|.\left|\vec{a_2}\right|}}$$

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a_\Delta}$

(α) có vectơ chỉ phương $\vec{n_\alpha}$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ và α. Ta có:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{a_\Delta}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{a_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|}}$$

III. Khoảng cách:

1. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ:

Δ đi qua điểm M_0 và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}$

$$\boxed{d(M,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{a_\Delta}, \overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{a_\Delta}\right|}}$$

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Δ_1 đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_1}$

Δ_2 đi qua điểm N và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}$

$$\boxed{d(\Delta_1,\Delta_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}\right]\right|}}$$

B. Kĩ năng giải bài tập

Các dạng toán thường gặp

1. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm phân biệt A, B.

Cách giải:

Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AB}$.

2. Đường thẳng Δ đi qua điểm M và song song với d.

Cách giải:

Trong trường hợp đặc biệt:

• Nếu Δ song song hoặc trùng bới trục Ox thì Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{a_\Delta} = \vec{i} = (1; 0; 0)$

• Nếu Δ song song hoặc trùng bới trục Oy thì Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{a_\Delta} = \vec{j} = (0; 1; 0)$

• Nếu Δ song song hoặc trùng bới trục Oz thì Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{a_\Delta} = \vec{k} = (0; 1; 0)$

Các trường hợp khác thì Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{a_\Delta} = \vec{a_d}$, với $\vec{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d

3. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α).

Cách giải:

Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a_\Delta} = \vec{n_\alpha}$, với $\vec{n_\alpha}$ là vectơ *pháp* tuyến của (α).

4. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 (hai đường thẳng không cùng phương).

Cách giải:

Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a_\Delta} = [\vec{a_1}, a_2]$, với $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1, d_2.

5. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M vuông góc với đường thẳng d và song song với mặt phẳng (α).

Cách giải:

Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a_\alpha} = [\vec{a_d}, \vec{n_\alpha}]$, với $\vec{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d, $\vec{n_\alpha}$ là vectơ *pháp* tuyến của (α).

6. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với hai mặt phẳng (α), (β); ((α), (β) là hai mặt phẳng cắt nhau)

Cách giải:

Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a_\Delta} = [\vec{n_\alpha}, \vec{n_\beta}]$, với $\vec{n_\alpha}$, $\vec{n_\beta}$ lần lượt là vectơ *pháp* tuyến của (α), (β).

7. Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

Cách giải:

• Lấy một điểm bất kì trên Δ, bằng cách cho một ẩn bằng một số tùy ý.

• Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a_\Delta} = [\vec{n_\alpha}, \vec{n_\beta}]$, với $\vec{n_\alpha}, \vec{n_\beta}$ lần lượt là vectơ *pháp* tuyến của (α), (β).

8. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 ($A \notin d_1$, $A \notin d_2$).

Cách giải:

Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a_\Delta} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}]$, với $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ lần lượt là vectơ *pháp* tuyến của mp(A, d_1), mp(A, d_2).

9. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) và cắt hai đường thẳng d_1, d_2.

Cách giải:

Xác định vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a_\Delta} = \vec{AB}$, với $A = d_1 \cap (\alpha)$, $B = d_2 \cap (\alpha)$

10. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc và cắt d.

Cách giải:

• Xác định $B = \Delta \cap d$.

• Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, B.

11. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với d_1 và cắt d_2, với $A \notin d_2$.

Cách giải:

• Xác định $B = \Delta \cap d_2$.

• Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, B.

12. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt đường thẳng d và song song với mặt phẳng (α).

Cách giải:

• Xác định B = Δ ∩ d.

• Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, B.

13. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) cắt và vuông góc đường thẳng d.

Cách giải:

• Xác định A = d ∩ (α).

• Đường thẳng Δ đi qua A và có vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a_\Delta} = [\vec{a_d}, \vec{n_\alpha}]$, với $\vec{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d, $\vec{n_\alpha}$ là vectơ *pháp* tuyến của (α).

14. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (α), nằm trong (α) và vuông góc đường thẳng d (ở đây d không vuông góc với (α)) .

Cách giải:

• Xác định A = d ∩ (α).

• Đường thẳng Δ đi qua A và có vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{a_\Delta} = [\vec{a_d}, \vec{n_\alpha}]$, với $\vec{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d, $\vec{n_\alpha}$ là vectơ *pháp* tuyến của (α).

15. Viết phương trình đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2.

Cách giải:

• Xác định A = Δ ∩ d_1, B = Δ ∩ d_2 sao cho $\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases}$

• Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.

16. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với đường thẳng d và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2.

Cách giải:

• Xác định A = Δ ∩ d_1, B = Δ ∩ d_2 sao cho $\vec{AB}$, $\vec{a_d}$ cùng phương, với $\vec{a_d}$ là vectơ chỉ phương của d.

• Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{a_d} = \vec{a_\alpha}$.

17. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2.

Cách giải:

• Xác định $A = \Delta \cap d_1$, $B = \Delta \cap d_2$ sao cho $\vec{AB}$, $\vec{n_\alpha}$ cùng phương, với $\vec{n_\alpha}$ là vectơ *pháp* tuyến của (α).

• Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{a_d} = \vec{n_\alpha}$.

18. Viết phương trình Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (α).

Cách giải :

Xác định $H \in \Delta$ sao cho $\vec{AH} \perp \vec{a_d}$,với a_d là vectơ chỉ phương của d.

• Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (α).

• Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β)

19. Viết phương trình Δ là hình chiếu song song của d lên mặt phẳng (α) theo phương d'.

Cách giải :

• Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d và có thêm một véc tơ chỉ phương $\vec{u_{d'}}$.

• Viết phương trình đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).