Nội dung bài viết

Giải bài tập Toán Hình 12 Bài 2: Phương trình mặt phẳng

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 2 trang 70: Trong không gian Oxyz cho ba điểm A(2; -1; 3), B(4; 0; 1), C(-10; 5; 3). Hãy tìm tọa độ một vecto *pháp* tuyến của mặt phẳng (ABC).

Lời giải:

$\overrightarrow{AB}$ = (2;1;-2); $\overrightarrow{AC}$ = (-12;6;0)

[$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$] = (12;24;24)

⇒ một vecto *pháp* tuyến của mặt phẳng (ABC) là $\vec{n}$(1;2;2)

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 2 trang 72: Hãy tìm một vecto *pháp* tuyến của mặt phẳng (α): 4x – 2y - 6z +7 = 0.

Lời giải:

Một vecto *pháp* tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}$(4; -2; -6)

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 2 trang 72: Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (MNP) với M(1; 1; 1), N(4; 3; 2), P(5; 2; 1).

Lời giải:

$\overrightarrow{MN}$ = (3;2;1); $\overrightarrow{MP}$ = (1;-1;-1)

[$\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$] = (-1;4;-5)

⇒ Một vecto *pháp* tuyến của mặt phẳng (MNP) là $\vec{n}$(1;-4;5)

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (MNP) với M(1; 1; 1), N(4; 3; 2), P(5; 2; 1)là : (x-1)-4(y-1)+5(z-1)=0

Hay x - 4y + 5z - 2 = 0

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 2 trang 73: Nếu B = 0 hoặc C = 0 thì mặt phẳng (α) có đặc điểm gì ?

Lời giải:

B = 0 ⇒ mặt phẳng (α) // hoặc chứa trục Oy ; C = 0 ⇒ mặt phẳng (α) // hoặc chứa trục Oz

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 2 trang 74: Nếu A = C = 0 và B ≠ 0 hoặc nếu B = C = 0 và A ≠ 0 thì mặt phẳng (α) có đặc điểm gì?

Lời giải:

A = C = 0 và B ≠ 0 ⇒ mặt phẳng (α) // hoặc trùng với (Oxz)

B = C = 0 và A ≠ 0 ⇒ mặt phẳng (α) // hoặc trùng với (Oyz)

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 2 trang 74: Cho hai mặt phẳng (α) và (β) có phương trình

(α): x - 2y + 3z + 1 = 0

(β): 2x – 4y + 6z + 1 = 0.

Có nhận xét gì về vecto *pháp* tuyến của *chú*ng ?

Lời giải:

$n_{\alpha}\rightarrow$ = (1;-2;3); $n_{\beta}\rightarrow$ = (2;-4;6)

Hai vecto *pháp* tuyến của hai mặt phẳng là hai vecto tỉ lệ

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 2 trang 80: Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) cho bởi các phương trình *sau* đây:

(α): x – 2 = 0

(β): x – 8 = 0.

Lời giải:

Ta có (α)//(β)

Lấy M (8;0;0) ∈ (β)

d((α),(β)) = d(M,(α)) = |8 - 2|/√1² = 6

Bài 1 (trang 80 SGK Hình học 12): Viết phương trình mặt phẳng:

a) Đi qua điểm M(1; -2; 4) và nhận n→ = (2 ; 3 ; 5) làm vec tơ *pháp* tuyến

b) Đi qua A(0; -1; 2) và song song với giá của mỗi vec tơ u→ = (3; 2; 1) và v→ = (-3; 0; 1).

c) Đi qua ba điểm A(-3; 0; 0); B(0; -2; 0) và C(0; 0; -1).

Lời giải:

a) Mặt phẳng đi qua điểm M(1; -2; 4) và nhận n→ = (2; 3; 5) làm vectơ *pháp* tuyến là:

2(x – 1) + 3(y + 2) + 5(z – 4) = 0

⇔ 2x + 3y + 5z – 16 = 0.

b) Mặt phẳng nhận u→ và v→ là vec tơ chỉ phương

⇒ nhận $\left[\vec{u};\vec{v}\right]$ = (2.1 – 1.0 ; 1.(-3) – 3.1 ; 3.0 – (-3).2) = (2; -6; 6) là vec tơ *pháp* tuyến.

Mặt phẳng đi qua A(0 ; -1 ; 2) nên có phương trình :

2(x – 0) – 6(y + 1) + 6(z – 2) = 0

⇔ 2x – 6y + 6z – 18 = 0

⇔ x – 3y + 3z – 9 = 0.

c) Cách 1:

$\overrightarrow{AB} = (3; -2; 0); \overrightarrow{AC} = (3; 0; -1).$

Mặt phẳng (R) đi qua ba điểm A, B, C nhận $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là hai vec tơ chỉ phương

⇒ Nhận $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]$ = ((-2).(-1) – 0; 0.3 – 3.(-1); 3.0 – 3.(-2)) = (2; 3; 6) là vec tơ *pháp* tuyến.

(R) đi qua A(-3; 0; 0) nên có phương trình:

2(x + 3) + 3y + 6z = 0

⇔ $2x + 3y + 6z + 6 = 0$.

Cách 2 :

(R) đi qua A(-3 ; 0 ; 0) ; B(0 ; -2 ; 0) ; C(0 ; 0 ; -1) nên có phương trình đoạn chắn là :

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{-1}=1$$

⇔ $2x + 3y + 6z + 6 = 0$.

Kiến thức áp dụng

+ Phương trình mặt phẳng đi qua $M(x_0 ; y_0 ; z_0)$ và nhận $\vec{n} = (a ; b ; c)$ là vec tơ *pháp* tuyến :

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

+ Tích có hướng của $\vec{u} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{v} = (b_1; b_2; b_3)$ là:

$\left[\vec{u};\vec{v}\right] = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$.

Tích có hướng $\left[\vec{u};\vec{v}\right]$ vuông góc với mỗi vec tơ $\vec{u}$; $\vec{v}$

+ Mặt phẳng cắt các trục Ox; Oy; Oz lần lượt tại các điểm A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ được gọi là phương trình đoạn chắn.

Bài 2 (trang 80 SGK Hình học 12): Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với A(2; 3; 7), B(4; 1; 3)

Lời giải:

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB

Tọa độ M là: $\begin{cases} x = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ y = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ z = \dfrac{7+3}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(3;2;5)$

Do (P) là mặt phẳng trung trực

của đoạn thẳng AB

nên mp(P) đi qua M

và nhận vecto $\overrightarrow{AB}(2; -2; -4)$ làm VTPT

Phương trình mặt phẳng (P) là:

2(x – 3) - 2.(y -2) – 4. (z – 5) =0

⇔ 2x – 2y - 4z +18 = 0

hay x- y -2z + 9 =0

Kiến thức áp dụng

+ Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm và vuông góc với AB (nhận $\overrightarrow{AB}$ là vectơ *pháp* tuyến).

Bài 3 (trang 80 SGK Hình học 12):

a) Lập phương trình của các mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz và Ozx

b) Lập phương trình của các mặt phẳng đi qua điểm M(2; 6; -3) và lần lượt song song với các mặt phẳng tọa độ.

Lời giải:

a) Mặt phẳng Oxy là tập hợp các điểm có cao độ z = 0 nên có phương trình: z = 0.

Tương tự:

Mặt phẳng Oyz: x = 0

Mặt phẳng Ozx: y = 0.

b) Phương trình mặt phẳng đi qua M(2; 6; -3) và song song với (Oxy): z + 3 = 0

Phương trình mặt phẳng đi qua M(2; 6; -3) và song song với (Oyz): x – 2 = 0

Phương trình mặt phẳng đi qua M(2; 6; -3) và song song với (Ozx): y – 6 = 0.

Bài 4 (trang 80 SGK Hình học 12): Lập phương trình mặt phẳng:

a)Chứa trục Ox và điểm P(4; -1; 2)

b)Chứa trục Oy và điểm Q(1; 4; -3)

c)Chứa trục Oz và điểm R(3; -4; 7)

Lời giải:

a) (P) chứa Ox và điểm P(4; -1; 2).

+ (P) chứa Ox ⇒ nhận i→ = (1; 0; 0) là 1 vtcp

+ (P) chứa O(0 ; 0 ; 0) và P(4 ; -1 ; 2) ⇒ nhận $\overrightarrow{OP}$ = (4 ; -1 ; 2) là 1 vtcp

⇒ (P) nhận $\left[\vec{i};\overrightarrow{OP}\right]$ = (0; -2; -1) là 1 vtpt

⇒ (P): -2.(y – 0) – 1.(z – 0) = 0

hay (P) : 2y + z = 0.

b) (Q) chứa trục Oy và điểm Q(1; 4; -3)

+ (Q) chứa Oy ⇒ nhận j→ = (0; 1; 0) là 1 vtcp).

+ (Q) chứa O(0 ; 0 ; 0) và Q(1 ; 4 ; -3) ⇒ nhận $\overrightarrow{OQ}$ = (1 ; 4 ; -3) là 1 vtcp

⇒ (Q) nhận $\left[\vec{j};\overrightarrow{OQ}\right]$ = (-3; 0; -1) là 1 vtpt

⇒ (Q): -3(x – 0) – 1.(z – 0) = 0

hay (Q): 3x + z = 0.

c) (R) chứa trục Oz và điểm R(3; -4; 7)

+ (R) chứa Oz ⇒ nhận k⟶ = (0; 0; 1) là 1 vtcp.

+ (R) chứa O(0 ; 0 ; 0) và R(3 ; -4 ; 7) ⇒ nhận $\overrightarrow{OR}$ = (3 ; -4 ; 7) là 1 vtcp

⇒ (R) nhận $\left[\vec{k};\overrightarrow{OR}\right]$ = (4; 3; 0) là 1 vtpt

⇒ (R): 4(x – 0) + 3.(y – 0) = 0

hay (R): 4x + 3y = 0.

Kiến thức áp dụng

+ Phương trình mặt phẳng đi qua M(x_0 ; y_0 ; z_0) và nhận n⟶ = (a ; b ; c) là vec tơ *pháp* tuyến :

a(x – x_0) + b(y – y_0) + c(z – z_0) = 0.

+ Tích có hướng của u⟶ = (a_1; a_2; a_3) và v⟶ = (b_1; b_2; b_3) là:

$\left[\vec{u};\vec{v}\right]$ = (a_2b_3 – a_3b_2; a_3b_1 – a_1b_3; a_1b_2 – a_2b_1).

Tích có hướng $\left[\vec{u};\vec{v}\right]$ vuông góc với mỗi vec tơ u⟶ ; v

Bài 5 (trang 80 SGK Hình học 12): Cho tứ diện có các đỉnh là A(5; 1; 3), B(1; 6; 2), C(5; 0; 4), D(4; 0; 6)

a)Hãy viết phương trình của các mặt phẳng (ACD) và (BCD)

b)Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD.

Lời giải:

a)Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ACD) vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AC}$=(0; -1;1) và $\overrightarrow{AD}$=(-1; -1; 3).

Vậy $\overrightarrow{n}$ =[$\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$]= (-2; -1; -1)

vậy phương trình của mp(ACD) là:

-2(x – 5) – 1(y – 1) – 1(z – 3) = 0

$\Leftrightarrow$ 2x + y + z – 14 = 0

Tương tự, phương trình của mp(BCD) là:

6x + 5y + 3z – 42 = 0

b) Gọi (P) là mặt phẳng đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}$ vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ = (-4; 5; -1) và $\overrightarrow{CD}$ = (-1; 0; 2),

$\overrightarrow{n}$ = [$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CD}$]= (10; 9; 5)

Vậy phương trình của (P) là:

10(x – 5) + 9(y – 1) + 5(z – 3) = 0

$\Leftrightarrow$ 10x + 9y + 5z – 74 = 0

Kiến thức áp dụng

+ Phương trình mặt phẳng đi qua M(x_0 ; y_0 ; z_0) và nhận n→ = (a ; b ; c) là vec tơ *pháp* tuyến :

$a(x – x_0) + b(y – y_0) + c(z – z_0) = 0.$

+ Tích có hướng của u→ = (a_1; a_2; a_3) và v→ = (b_1; b_2; b_3) là:

$\left[\vec{u};\vec{v}\right] = (a_2b_3 – a_3b_2; a_3b_1 – a_1b_3; a_1b_2 – a_2b_1).$

Bài 6 (trang 80 SGK Hình học 12): Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M(2; -1; 2) và song song với mặt phẳng (β) : 2x – y + 3z + 4 = 0

Lời giải:

Vì mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) : 2x – y + 3z + 4 = 0 nên phương trình của mp(α) có dạng 2x – y + 3z + D = 0

Vì M(2; -1; 2) ∈ mp(α) nên 4 + 1 + 6 + D = 0 <=> D = -11

Vậy phương trình của mp(α) là: 2x – y + 3z - 11= 0

Kiến thức áp dụng

+ Mặt phẳng (P) nhận n_1→ là 1 vtpt; mặt phẳng (Q) nhận n_2→ là 1 vtpt

(P) // (Q) ⇔ $\overrightarrow{n_1} = k.\overrightarrow{n_2}$

Do đó: phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng: ax + by + cz + d = 0 luôn có dạng: ax + by + cz + d' = 0.

Bài 7 (trang 80 SGK Hình học 12): Lập phương trình mặt phẳng (α) qua hai điểm A(1; 0; 1), B(5; 2; 3) và vuông góc với mặt phẳng (β) : 2x – y + z – 7 = 0

Lời giải:

+ (β) nhận $\overrightarrow{n_\beta}$ = (2; -1; 1) là 1 vtpt

(α) ⊥ (β) ⇒ vtpt của (α) $\overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{n_\beta}$.

+ (α) đi qua A(1; 0; 1) và B(5; 2; 3)

$\Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{AB} = (4;2;2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{n_\beta}\right] = (4;0;-8)$

⇒ Phương trình mặt phẳng (α):

4x – 8z + 4 = 0 hay x – 2z + 1 = 0.

Kiến thức áp dụng

+ Phương trình mặt phẳng đi qua M(x_0 ; y_0 ; z_0) và nhận n→ = (a ; b ; c) là vec tơ *pháp* tuyến :

a(x – x_0) + b(y – y_0) + c(z – z_0) = 0.

+ Tích có hướng của u→ = (a_1; a_2; a_3) và v→ = (b_1; b_2; b_3) là:

$\left[\vec{u};\vec{v}\right]$ = ($a_2b_3 – a_3b_2$; $a_3b_1 – a_1b_3$; $a_1b_2 – a_2b_1$).

Tích có hướng $\left[\vec{u};\vec{v}\right]$ vuông góc với mỗi vec tơ u→ ; v

Bài 8(trang 81 SGK Hình học 12): Xác định các giá trị của m và n để mỗi cặp mặt phẳng sau đây là một cặp mặt phẳng song song với nhau;

a)2x + my + 3z – 5 = 0 và nx – 8y – 6z + 2 =0

b)3x – 5y + mz – 3 = 0 và 2x + ny – 3z + 1 = 0

Lời giải:

$$\text{a)Ta có: } (\alpha) \,//\, (\beta) \Leftrightarrow \frac{2}{n} = \frac{m}{-8} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-5}{2}$$

vậy n = - 4 và m = 4

$$\text{b)Ta có: } (\alpha) \,//\, (\beta) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{-5}{n} = \frac{m}{-3} \neq \frac{-3}{1}$$

$$\text{vậy } n = -\frac{10}{3} \text{ và } m = -\frac{9}{2}$$

Kiến thức áp dụng

+ Mặt phẳng (P): ax + by + cz + d = 0 và mặt phẳng (Q): a’x + b’y + c’z + d’ = 0

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Bài 9 (trang 81 SGK Hình học 12): Tính khoảng cách từ điểm A(2; 4; -3) lần lượt đến các mặt phẳng sau:

a) 2x – y + 2z – 9 = 0 (α)

b) 12x – 5z + 5 = 0 (β)

c) x = 0 (γ;)

Lời giải:

a.Ta có :

$$d_1 = d(A;(\alpha)) = \frac{|2.2-4+2.(-3)-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2}} = 5$$

b. Ta có

$$d_2 = d(A,(\beta)) = \frac{|12.2-5.(-3)+5|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} = \frac{44}{13}$$

c. Ta có :

$$d_3 = d(A;(\gamma)) = \frac{|2|}{\sqrt{1^2}} = 2$$

Kiến thức áp dụng

+ Khoảng cách từ A(x_0; y_0; z_0) đến mặt phẳng (α): ax + by + cz + d = 0 là:

$$d_{(A;\alpha)} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

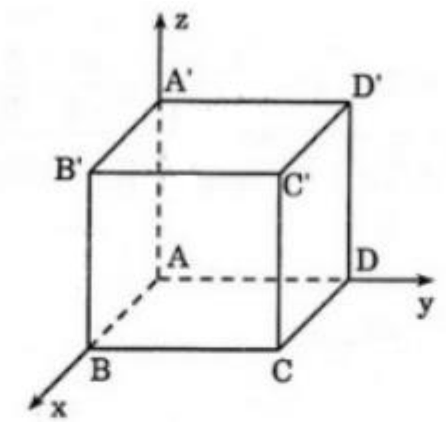
Bài 10 (trang 81 SGK Hình học 12): giải bài toán *sau* đây bằng phương *pháp* tọa độ:

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng 1.

a)Chứng minh hai mặt phẳng (AB'D') và (BC'D) song song.

b)Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng nói trên.

Lời giải:



Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O ≡ A; $\vec{i} = \overrightarrow{AB};\ \vec{j} = \overrightarrow{AD};\ \vec{k} = \overrightarrow{AA'}$

⇒ A(0; 0; 0) ; B(1; 0; 0); C(1; 1; 0); D(0; 1; 0).

A'(0; 0; 1); B'(1; 0; 1); C'(1; 1; 1); D'(0; 1; 1).

a)

$$+\ \overrightarrow{AB'} = (1;\ 0;\ 1);\ \overrightarrow{AD'} = (0;\ 1;\ 1)$$

⇒ Vectơ *pháp* tuyến của (AB'D') là:

$$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AD'}\right] = (-1;-1;1).$$

$$+\ \overrightarrow{BC'} = (0;\ 1;\ 1);\ \overrightarrow{DC'} = (1;\ 0;\ 1).$$

⇒ Vectơ *pháp* tuyến của (BC'D) là:

$$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{BC};\overrightarrow{DC'}\right] = (1;1;-1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_2} = -\overrightarrow{n_1}$$

⇒ (AB'D') // (BC'D).

b) Mặt phẳng (BC'D) có VTPT $\overrightarrow{n_2}$ (1;1; -1) và qua B (1; 0;0) nên có phương trình:

1(x- 1) + 1(y – 0) - 1(z- 0)= 0 hay x + y - z - 1 = 0

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (AB'D') và (BC'D) chính là khoảng cách từ A đến (BC'D) và bằng :

$$d = \frac{|0+0-0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Kiến thức áp dụng

+ Mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{n_1}$ là 1 vtpt; mặt phẳng (Q) nhận $\overrightarrow{n_2}$ là 1 vtpt

$(P) // (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} = k.\overrightarrow{n_2}$

+ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trong mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Lý thuyết Toán Hình lớp 12 Bài 2: Phương trình mặt phẳng

A. Tóm tắt lý thuyết

I. Vectơ *pháp* tuyến của mặt phẳng

• Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vectơ *pháp* tuyến (VTPT) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α)

• *Chú ý:*

- Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ cũng là một VTPT của mặt phẳng (α).

- Một mặt phẳng được xác định duy nhất nếu biết một điểm nó đi qua và một VTPT của nó.

- Nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một VTPT của (α)

II. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

- Trong không gian Oxy , mọi mặt phẳng đều có dạng phương trình:

$Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

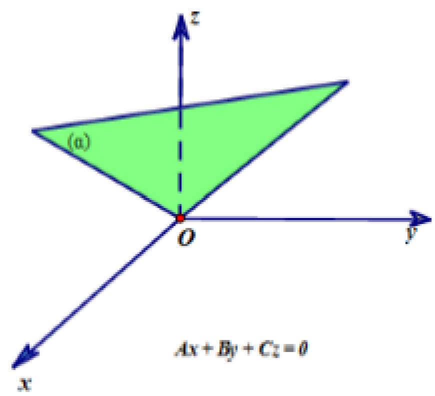
- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình Ax + By + Cz + D = 0 thì nó có một VTPT là $\vec{n}(A; B; C)$.

- Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và nhận vectơ $\vec{n}(A; B; C)$ khác $\vec{0}$ là VTPT là: $A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$.

• Các trường hợp riêng

Xét phương trình mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0 với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

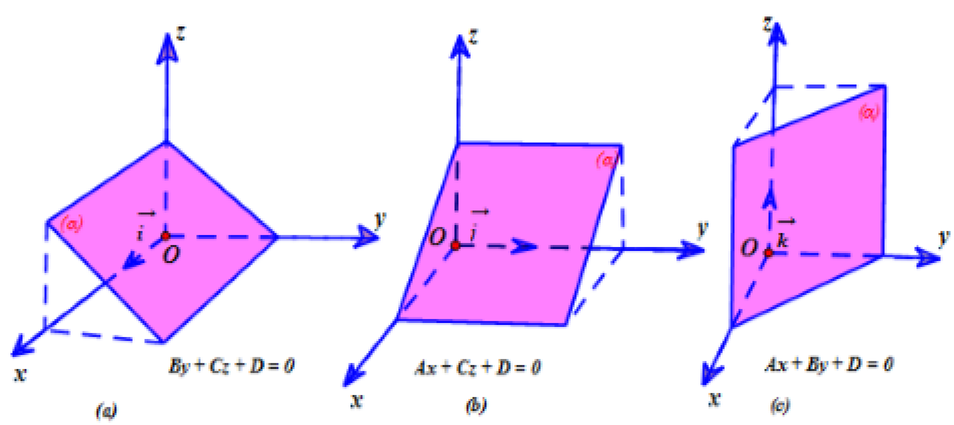
- Nếu D = 0 thì mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O.



- Nếu A = 0, B ≠ 0, C ≠ 0 thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox.

- Nếu A ≠ 0, B = 0, C ≠ 0 thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy.

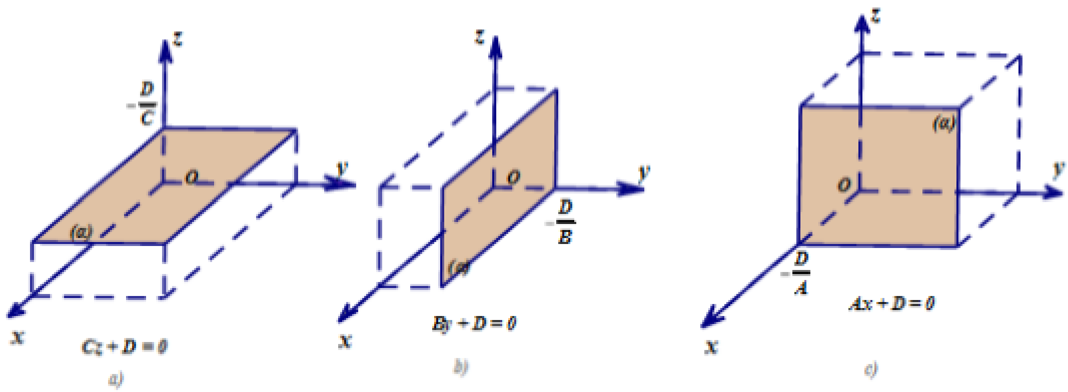
- Nếu A ≠ 0, B ≠ 0, C = 0 thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz.



- Nếu A = B = 0, C ≠ 0 thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxy).

- Nếu A = C = 0, B ≠ 0 thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxz).

- Nếu B = C = 0, A ≠ 0 thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oyz).



Chú **ý:**

- Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.

- Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn (α): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Ở đây (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c) với abc ≠ 0.

III. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

• Trong không gian Oxyz, cho điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và mặt phẳng (α): Ax + By + Cz + D = 0

Khi đó khoảng cách từ điểm M_o đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

IV. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (α): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và (β): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $n_\alpha\longrightarrow$, $n_\beta\longrightarrow$. Tức là:

$$\cos((\alpha),(\beta)) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\overrightarrow{n_\beta}\right|} = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

B. Kĩ năng giải bài tập

Một số dạng bài tập về viết phương trình mặt phẳng

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng khi biết một điểm và vectơ *pháp* tuyến của nó.

Phương *pháp* giải

Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 1 điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ và song song với 1 mặt phẳng (β): Ax + By + Cz + D = 0 cho *trước*.

Phương *pháp* giải

Cách 1: Thực hiện theo các bước *sau*:

1. VTPT của (β) là $\overrightarrow{n_\beta}$ = (A; B; C)

2. (α) // (β) nên VTPT của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_\beta}$ = (A; B; C)

3. Phương trình mặt phẳng (α): $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Cách 2:

1. Mặt phẳng (α) // (β) nên phương trình (P) có dạng: Ax + By + Cz + D' = 0 (*), với D' ≠ D.

2. Vì (P) qua 1 điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ nên thay tọa độ $M_o(x_o; y_o; z_o)$ vào (*) tìm được D'.

Dạng 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

Phương *pháp* giải

1. Tìm tọa độ các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

2. Vectơ *pháp* tuyến của (α) là: $\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$

3. Điểm thuộc mặt phẳng: A (hoặc B hoặc C).

4. Viết phương trình mặt phẳng qua 1 điểm và có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}$

Dạng 4: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng Δ

Phương *pháp* giải

1. Tìm VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}$

2. Vì (α) ⊥ Δ nên (α) có VTPT $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{u_\Delta}$

3. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT $\overrightarrow{n_\alpha}$

Dạng 5: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ, vuông góc với mặt phẳng (β)

Phương *pháp* giải

1. Tìm VTPT của (β) là $\overrightarrow{n_\beta}$

2. Tìm VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}$

3. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{n_\beta}; \overrightarrow{u_\Delta}]$

4. Lấy một điểm M trên Δ

5. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Dạng 6: Viết phương trình mặt phẳng (α) qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β)

Phương *pháp* giải

1. Tìm VTPT của (β) là $\overrightarrow{n_\beta}$

2. Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$

3. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{n_\beta}, \overrightarrow{AB}]$

4. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Dạng 7: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ' (Δ, Δ' chéo nhau).

Phương *pháp* giải

1. Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\overrightarrow{u_\Delta}$ và $\overrightarrow{u_{\Delta'}}$

2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{\Delta'}}]$

3. Lấy một điểm M trên Δ

4. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Dạng 8: Viết phương trình mặt phẳng (α)hứa đường thẳng Δ và 1 điểm M

Phương *pháp* giải

1. Tìm VTCP của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}$, lấy 1 điểm N trên Δ. Tính tọa độ $\overrightarrow{MN}$

2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{u_\alpha}; \overrightarrow{MN}]$

3. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Dạng 9: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa 2 đường thẳng cắt nhau Δ và Δ'

Phương *pháp* giải

1. Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\overrightarrow{u_\Delta}$ và $\overrightarrow{u_{\Delta'}}$

2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{u}_\Delta; \overrightarrow{u_{\Delta'}}]$

3. Lấy một điểm M trên Δ

4. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Dạng 10: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa 2 song song Δ và Δ'

Phương *pháp* giải

1. Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\overrightarrow{u_\Delta}$ và $\overrightarrow{u_{\Delta'}}$, lấy M ∈ Δ, N ∈ Δ'

2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{u_\Delta}; \overrightarrow{MN}]$

3.Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Dạng 11: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua một điểm M và song song với hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau cho *trước*.

Phương *pháp* giải

1. Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\vec{u_\Delta}$ và $\vec{u_{\Delta'}}$

2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n_\alpha} = [\vec{u_\Delta}; \vec{u_{\Delta'}}]$

3.Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Dạng 12: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua một điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q) cho *trước*.

Phương *pháp* giải

1. Tìm VTPT của (P) và (Q) là $\vec{n_P}$ và $\vec{n_Q}$

2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n_\alpha} = [\vec{n_P}; \vec{n_Q}]$

3.Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Dạng 13: Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) và cách (β): Ax + By + Cz + D = 0 một khoảng k cho *trước*.

Phương *pháp* giải

1. Trên mặt phẳng (β) chọn 1 điểm M.

2. Do (α) // (β) nên (α) có phương trình Ax + By + Cz + D' = 0 (D' ≠ D).

3. Sử dụng công thức khoảng cách d((α), (β)) = d(M, (β)) = k để tìm D'.

Dạng 14: Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β): Ax + By + Cz + D = 0 cho *trước* và cách điểm M một khoảng k cho *trước*.

Phương *pháp* giải

1. Do (α) // (β) nên (α) có phương trình Ax + By + Cz + D' = 0 (D' ≠ D).

2. Sử dụng công thức khoảng cách d(M, (α)) = k để tìm D'.

Dạng 15: Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Phương *pháp* giải

1. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính của mặt cầu (S)

2. Nếu mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M ∈ (S) thì mặt phẳng (α) đi qua điểm M và có VTPT là $\overrightarrow{MI}$

3. Khi bài toán không cho tiếp điểm thì ta phải sử dụng các dữ kiện của bài toán tìm được VTPT của mặt phẳng và viết phương trình mặt phẳng có dạng: Ax + By + Cz + D = 0 (D chưa biết).

Sử dụng điều kiện tiếp xúc: d(I,(α)) = R để tìm D.

Dạng 16: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa một đường thẳng Δ và tạo với một mặt phẳng (β): Ax + By + Cz + D = 0 cho *trước* một góc φ cho *trước*.

Phương *pháp* giải

1. Tìm VTPT của (β) là $\overrightarrow{n_\beta}$

2. Gọi $\overrightarrow{n_\alpha}$(A'; B'; C')

3. Dùng phương *pháp* vô định giải hệ: $\begin{cases} (\overrightarrow{n_\alpha};\overrightarrow{n_\beta}) = \varphi \\ \overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}$

4. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.