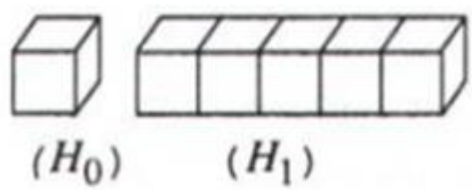
Nội dung bài viết

Giải bài tập Toán Hình 12 Bài 3: Khái niệm về thể tích của khối đa diện

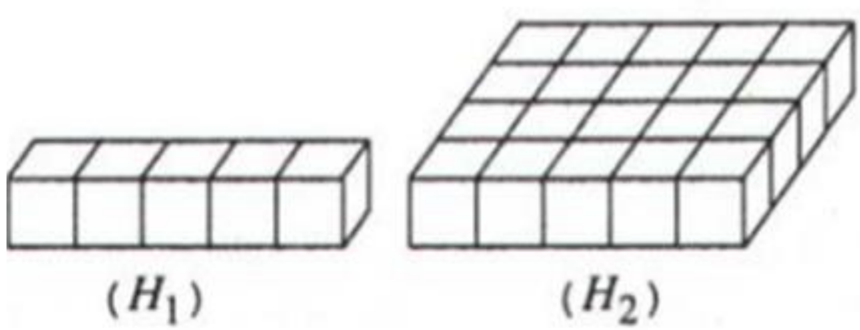
Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 3 trang 22: Có thể chia (H_1) thành bao nhiêu khối lập phương bằng (H_0) ?



Lời giải:

Có thể chia (H_1) thành 5 khối lập phương (H_0)

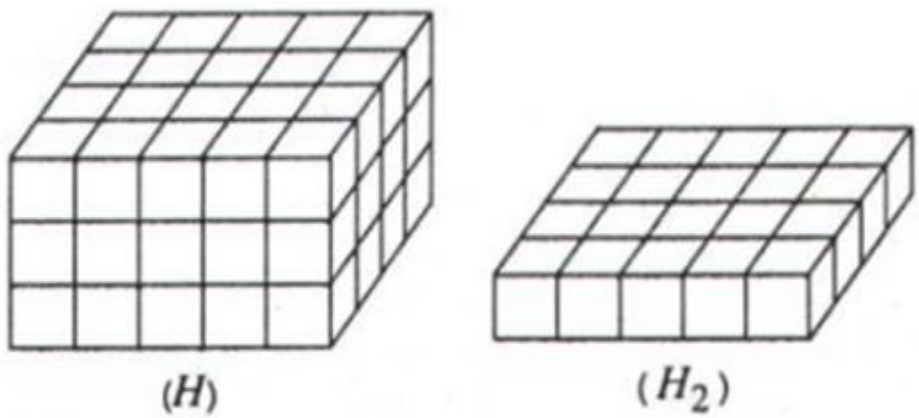
Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 3 trang 22: Có thể chia (H_2) thành bao nhiêu khối hộp chữ nhật bằng (H_1)?



Lời giải:

Có thể chia (H_2) thành 4 khối hộp chữ nhật (H_1)

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 3 trang 22: Có thể chia (H) thành bao nhiêu khối hộp chữ nhật bằng (H_2) ?



Lời giải:

Có thể chia (H) thành 3 khối hộp chữ nhật (H_2)

Trả lời câu hỏi Toán 12 Hình học Bài 3 trang 24: Kim tự tháp Kê-ốp ở Ai Cập (h.1.27) được xây dựng vào khoảng 2500 năm *trước* Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao 147 m, cạnh đáy dài 230 m. Hãy tính thể tích của nó.

Hình 1.27

Lời giải:

Kim tự tháp là khối chóp tứ giác đều nên đáy là hình tam giác đều có cạnh 230m

Đường cao của mặt đáy là:

$$\sqrt{230^2 - \left(\frac{230}{2}\right)^2} = 230\frac{\sqrt{3}}{2}(\mathrm{m})$$

Diện tích đáy là:

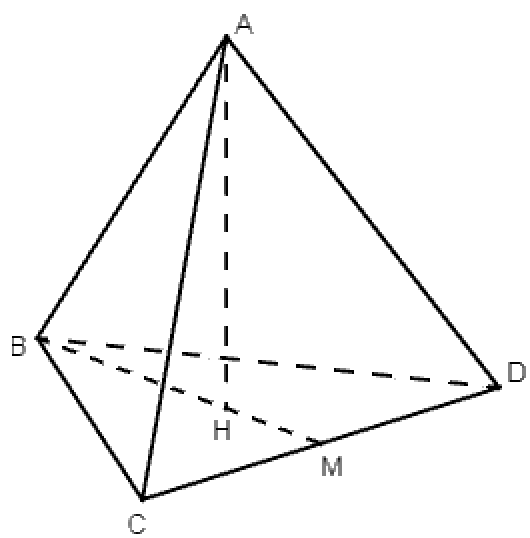
$$\frac{1}{2}.230\frac{\sqrt{3}}{2}.230 = 52900\frac{\sqrt{3}}{4}(\mathrm{m}^2)$$

Thể tích kim tự tháp là

1/3.52900 √3/4.147 ≈ 1 122 412,225(m^3)

Bài 1 trang 25 SGK Hình học 12: Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh a.

Lời giải:



Gọi ABCD là tứ diện đều cạnh a.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD

⇒ HB = HC = HD nên H nằm trên trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. (1)

Lại có: AB = AC = AD vì ABCD là tứ diện đều

⇒ HA là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD

$\Rightarrow HA \perp (BCD)$

Vì tam giác BCD là tam giác đều nên H đồng thời trọng tâm tam giác BCD. Gọi M là trung điểm của CD.

Xét tam giác BCD ta có:

$$BM = BD.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Lại có:

$$BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Áp dụng định lí pytago vào tam giác vuông AHB ta được:

$$AH^2 = AB^2 - HB^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

Diện tích tam giác đều BCD cạnh a là: $S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Do đó, thể tích khối tứ diện đều ABCD là: $V = \frac{1}{3}AH.S_{BCD} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

Kiến thức áp dụng

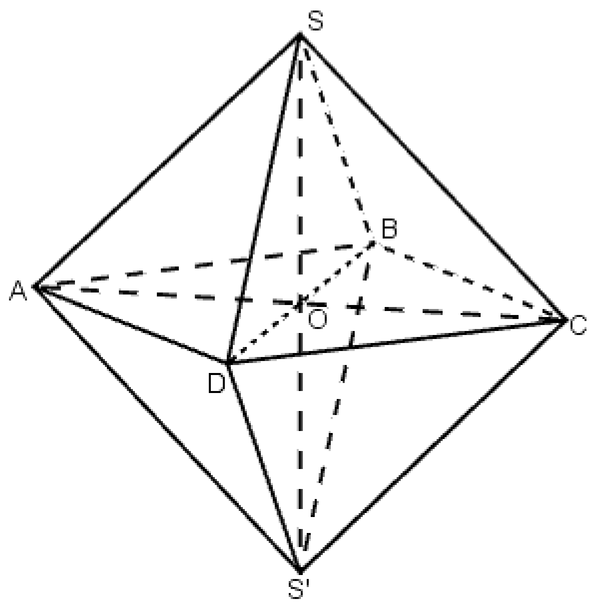
+ Thể tích khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là:

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

+ Diện tích tam giác đều cạnh a là: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Bài 2 trang 25 SGK Hình học 12: Tính thể tích khối bát diện đều cạnh a.

Lời giải:



Gọi khối bát diện đều là SABCDS’ cạnh a.

* Ta chia khối bát diện thành hai khối chóp tứ giác đều bằng nhau là:

S. ABCD và S’. ABCD có cạnh bằng a.

Khi đó, $V_{SABCDS'} = V_{S.ABCD} + V_{S'.ABCD} = 2.V_{S.ABCD}$

Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra: SO ⊥ (ABCD)

* Ta tính thể tính khối tứ diện đều cạnh a.

Tứ giác ABCD là hình vuông cạnh a nên có diện tích là: $S_{ABCD} = a^2$

Ta có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2}$$

Áp dụng định lí pytago vào tam giác SOA ta có:

$$SO^2 = SA^2 - AO^2$$

$$= a^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SO = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Thể tích khối tứ diện đều S.ABCD là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SO.\ S_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{a}{\sqrt{2}}.a^2 = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}$$

Thể tích khối bát diện đều cạnh a là:

$$V_{SABCDS'} = 2.\ V_{S.ABCD} = 2.\frac{a^3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$$

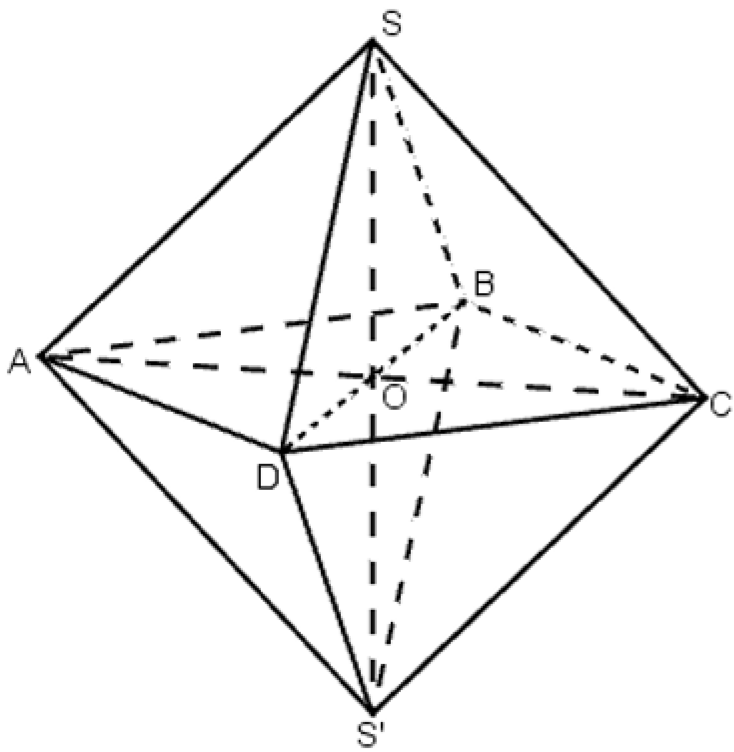
Kiến thức áp dụng

+ Thể tích khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là:

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

Bài 3 trang 25 SGK Hình học 12: Cho khối hộp ABCD.A’B’C’D’. Tính tỉ số giữa thể tích của khối hộp đó và thể tích của khối tứ diện ACB’D’.

Lời giải:



Gọi khối bát diện đều là SABCDS’ cạnh a.

* Ta chia khối bát diện thành hai khối chóp tứ giác đều bằng nhau là:

S.ABCD và S’.ABCD có cạnh bằng a.

Khi đó, $V_{SABCDS'} = V_{S.ABCD} + V_{S'.ABCD} = 2.V_{S.ABCD}$

Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra: SO ⊥ (ABCD)

* Ta tính thể tính khối chóp tứ giác đều cạnh a.

Tứ giác ABCD là hình vuông cạnh a nên có diện tích là: $S_{ABCD} = a^2$

Ta có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Áp dụng định lí Pytago vào tam giác SOA ta có:

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Thể tích khối chóp tứ giác đều S.ABCD là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a}{\sqrt{2}}.a^2 = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}$$

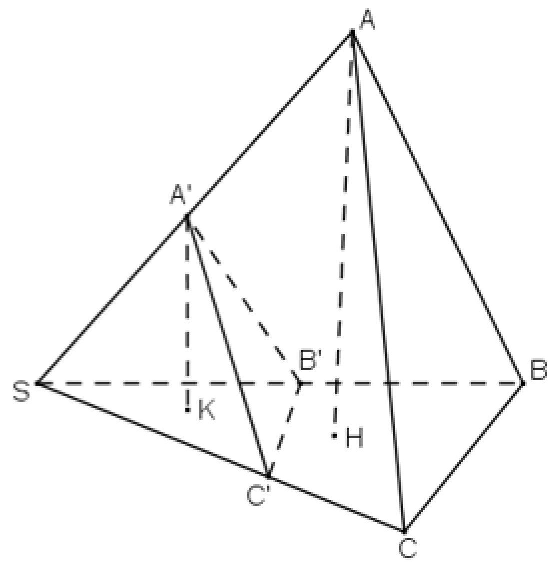
Thể tích khối bát diện đều cạnh a là:

$$V_{SABCDS'} = 2.V_{S.ABCD} = 2.\frac{a^3}{3\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \text{ (đvtt).}$$

Bài 4 trang 25 SGK Hình học 12: Cho khối chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A’, B’, C’ khác với S. Chứng minh rằng:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Lời giải:



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và A' trên mp(SBC),

Đặt AH = h_1 và A'K = h_2 ,

S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai tam giác SBC và SB'C'.

* Do A'K// AH nên bốn điểm A, A'; K và H đồng phẳng. (1)

Lại có, 3 điểm A, S, H đồng phẳng (2).

Từ (1) và (2) suy ra, 5 điểm A, A', S. H và K đồng phẳng.

Trong mp(ASH) ta có: $\begin{cases} A'K \perp SK \\ AH \perp SH \Rightarrow SK \equiv SH \\ A'K // AH \end{cases}$

⇒ Ba điểm S, H và K thẳng hàng.

* Ta có:

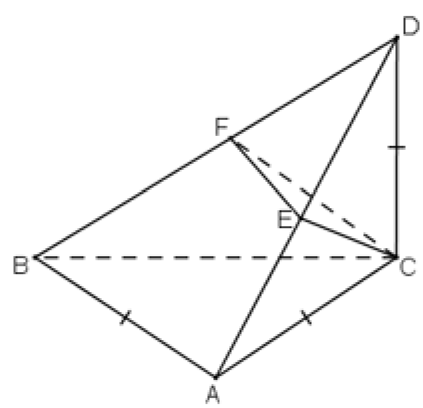
$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{A'K}{AH} = \frac{SA'}{SA}$$

Và $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{2}\sin\widehat{B'SC'}.SB'.SC'}{\frac{1}{2}\sin\widehat{BSC}.SB.SC} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$

Vậy $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3}.S_2.h_2}{\frac{1}{3}.S_1.h_1} = \frac{h_2}{h_1}.\frac{S_2}{S_1} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$ (đpcm).

Bài 5 trang 26 SGK Hình học 12: Cho tam giác ABC, vuông cân ở A và AB = a. Trên đường thẳng qua C, vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho CD = a. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD cắt BD tại F và cắt AD tại E. Tính thể tích khối tứ diện CDEF theo a.

Lời giải:



Ta có:

$$\begin{cases} BA \perp CD \\ BA \perp CA \end{cases} \Rightarrow BA \perp (CDA) \Rightarrow \text{BA} \perp \text{CE};(1)$$

Mặt khác: $BD \perp$ (CEF) $\Leftrightarrow$ BD $\perp$ CE; (2)

Từ (1) và (2) suy ra, $CE \perp$ (ABD).

Vậy $CE \perp EF; CE \perp AD$

Tam giác ACD vuông cân tại C

với CA= CD= a nên:

$$\text{AD}= a\sqrt{2} \Rightarrow CE = \frac{AD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Ta có:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2}a;$$
$$BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{3}a$$

Tam giác BCD vuông tại C

có đường cao CF nên

CF. BD = BC. CD

$$\Rightarrow CF = \frac{BC.CD}{BD} = \frac{\sqrt{2}a.a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

Ta có:

$$EF = \sqrt{CF^2 - CE^2} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6};$$

$$DF = \sqrt{DC^2 - CF^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2}CE.EF = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$$

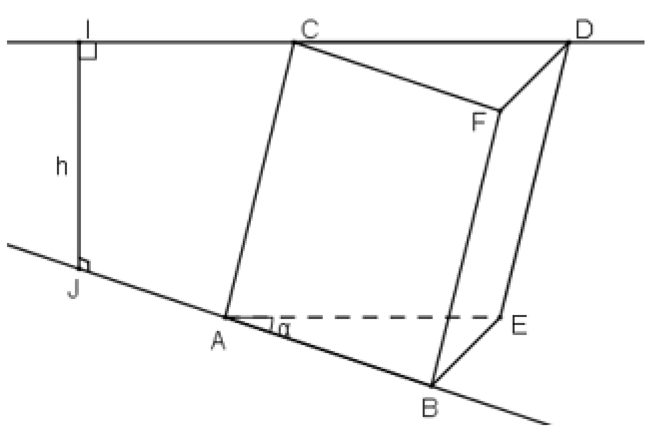
Vậy thể tích khối tứ diện CDEF là:

$$V_{CDEF} = V_{D.CEF}$$

$$= \frac{1}{3}.S_{CEF}.DF = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{36}$$

Bài 6 trang 26 SGK Hình học 12: Cho hai đường thẳng chéo nhau d và d'. Đoạn thẳng AB có độ dài bằng a trượt trên d, đoạn thẳng CD có độ dài bằng b trượt trên d'. Chứng minh rằng khối tứ diện ABCD có thể tích không đổi.

Lời giải:



Gọi h là khoảng cách hai đường thẳng d và d', gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng d và d'.

Lần lượt vẽ hai hình bình hành BACF và ACDE.

Khi đó, ABE.CFD là hình lăng trụ tam tam giác có chiều cao h; AE = CD = b

và $\alpha = \begin{cases} \widehat{BAE}; \widehat{BAE} \le 90^0 \\ 180^0 - \widehat{BAE}; \widehat{BAE} > 90^0 \end{cases}$

Gọi S là diện tích đáy của hình lăng trụ .

Ta chia hình lăng trụ ABE. CFD thành ba hình chóp tam giác là: D. ABE, B. CFD, D.ABC. Ta có:

$$V_{D.ABE} = V_{B.CFD} = \frac{1}{3}S.h$$

$$\Rightarrow V_{D.ABC} = S.h - \frac{1}{3}S.h - \frac{1}{3}S.h$$

$$= \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.AE.\sin\widehat{BAE}.h$$

$$= \frac{1}{6}.\text{absin}\,\alpha.\text{h}$$

Do đó, thể tích khối tứ diện ABCD không đổi.

Lý thuyết Toán Hình lớp 12 Bài 3: Khái niệm về thể tích của khối đa diện

A. Tóm tắt lý thuyết

I. NHẮC LẠI MỘT SỐ ĐỊNH NGHĨA

• Hình lăng trụ là hình có hai đáy là hai đa giác bằng nhau nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau và các mặt bên đều là các hình bình hành.

1. Hình lăng trụ đứng

Định nghĩa. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

2. Hình lăng trụ đều

Định nghĩa. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Tính chất. Các mặt bên của hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

• **Hình hộp** là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

1. Hình hộp đứng

Định nghĩa. Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

Tính chất. Hình hộp đứng có 2 đáy là hình bình hành, 4 mặt xung quanh là 4 hình chữ nhật.

2. Hình hộp chữ nhật

Định nghĩa. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tính chất. Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.

3. Hình lập phương

Định nghĩa. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật 2 đáy và 4 mặt bên đều là hình vuông

Tính chất. Hình lập phương có 6 mặt đều là hình vuông.

• **Hình chóp** là hình có đáy là một đa giác và các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh.

II. THỂ TÍCH

1. Công thức tính thể tích khối chóp

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S.h}$$

Trong đó: S là diện tích đáy, h là chiều cao khối chóp.

2. Công thức tính thể tích khối lăng trụ

$$\boxed{V = B.h}$$

Trong đó: B là diện tích đáy, h là hiều cao khối lăng trụ

● **Thể tích khối hộp chữ nhật:** V = abc

Trong đó: a, b, c là ba kích thước của khối hộp chữ nhật.

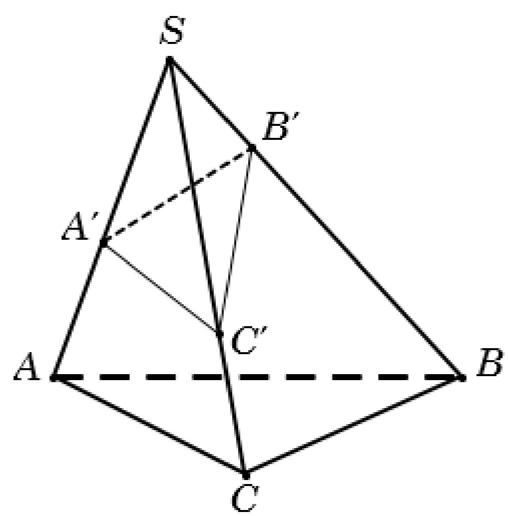
● **Thể tích khối lập phương:** $V = a^3$

Trong đó a là độ dài cạnh của hình lập phương.

III. TỈ SỐ THỂ TÍCH

Cho khối chóp S.ABC và A', B', C' là các điểm tùy ý lần lượt thuộc SA, SB, SC ta có

$$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}}$$



Phương pháp này được áp dụng khi khối chóp không xác định được chiều cao một cách dễ dàng hoặc khối chóp cần tính là một phần nhỏ trong khối chóp lớn và cần chú ý đến một số điều kiện sau

- Hai khối chóp phải cùng chung đỉnh.

- Đáy hai khối chóp phải là tam giác.

- Các điểm tương ứng nằm trên các cạnh tương ứng.