Nội dung bài viết

Giải bài tập Toán 12 Ôn tập chương 4 giải tích

Bài 1 (trang 143 SGK Giải tích 12): Thế nào là phần thực phần ảo, mô đun của một số phức? Viết công thức tính mô đun của số phức theo phần thực phần ảo của nó?

Lời giải:

Mỗi số phức là một biểu thức z = a + bi với a, b ∈ R, $i^2 = -1$

- Số thực a là phần thực của số phức: z = a + bi

- Số thực b là phần ảo của số phức z = a + bi

- Môđun của số phức z = a + bi là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Bài 2 (trang 143 SGK Giải tích 12): Tìm mối liên hệ giữa khái niêm mô đun và khái niệm giá trị *tuyệt đối* của số thực.

Lời giải:

Mỗi số thực a là một số phức có phần ảo bằng 0.

Ta có: a ∈ R ⇒ a = a + 0i

Mô đun của số thực a là:

$$|a| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$$

Như vậy với một số thực, khái niệm mô đun và khái niệm giá trị *tuyệt đối* là đồng nhất.

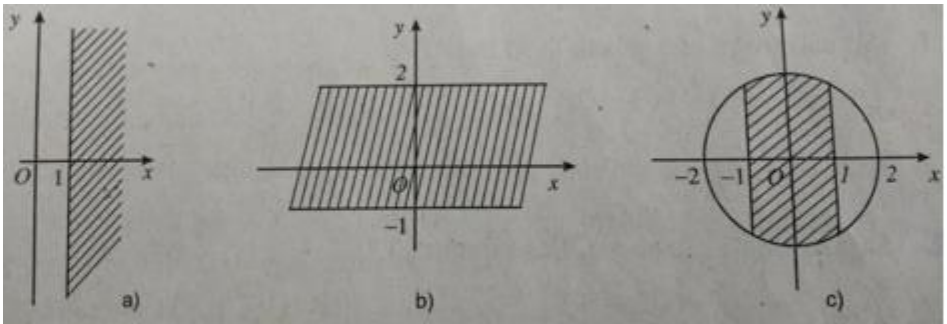
Bài 3 (trang 143 SGK Giải tích 12): Nêu định nghĩa số phức liên hợp với số phức z. Số phức nào bằng số phức liên hợp của nó?

Lời giải:

Cho số phức z = a + bi (a, b ∈ R) thì số phức liên hợp của số phức z kí hiệu là z = a - bi

Số phức z bằng số phức liên hợp z– của nó khi và chỉ khi z là số thực

Bài 4 (trang 143 SGK Giải tích 12): Số phức thỏa mãn điều kiện nào thì có điểm biểu diễn ở phần gạch chéo trong các hình a, b , c?



Hình 71

Lời giải:

a) Mỗi số phức z = a + bi có điểm biểu diễn trong miền gạch sọc ở hình a phải thỏa mãn điều kiện: phần thực a ≥ 1 (phần ảo b bất kì).

b) Số phức z = a + bi có điểm biểu diễn trong miền gạch sọc ở hình b phải thỏa mãn điều kiện : phần ảo b ∈ [-1;2] (phần thực a bất kì).

c) Số phức z = a + bi có điểm biểu diễn trong miền gạch sọc ở hình c phải thỏa mãn 2 điều kiện:

+ Mô đun của z là $\sqrt{a^2+b^2} \leq 2$

+ Phần thực a ∈ [-1; 1]

Bài 5 (trang 143 SGK Giải tích 12): Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp biểu diễn của các số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) Phần thực của z bằng 1

b) Phần ảo của z bằng -2

c) Phần thực của z thuộc đoạn [-1; 2], phần ảo của z thuộc đoạn [0; 1]

d) |z|≤2

Lời giải:

Điểm M(x; y) biểu diễn số phức z = x + yi.

a) Phần thực của z bằng 1

$\Leftrightarrow$ x = 1

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng x = 1.

b) Phần ảo của z bằng -2

$\Leftrightarrow$ y = -2

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng y = -2.

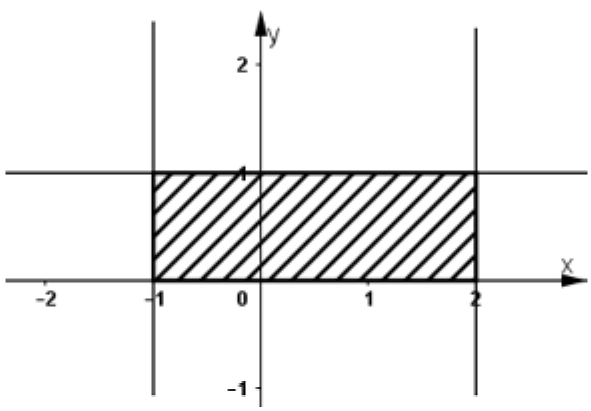
c) Phần thực của z thuộc đoạn [-1; 2]

$\Leftrightarrow -1 \le x \le 2$.

phần ảo của z thuộc đoạn [0; 1]

$\Leftrightarrow 0 \le y \le 1$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hình gạch sọc dưới đây:

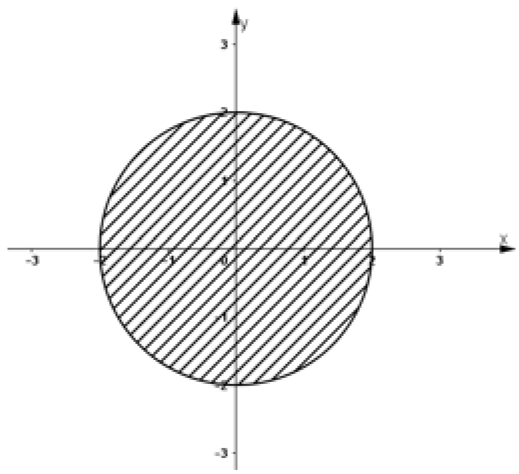


d) $|z| \le 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \le 2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hình tròn tâm O(0; 0), bán kính R = 2.



Bài 6 (trang 143 SGK Giải tích 12): Tìm các số thực x, y sao cho:

a) 3x+yi=2y+1+(2-x)i

b) 2x+y-1=(x+2y-5)i

Lời giải:

a) Ta có: $3x + yi = 2y + 1 + (2 - x)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y + 1 \\ y = 2 - x \end{cases} <=> \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

b) Ta có: $2x + y - 1 = (x + 2y - 5)i$

$\Leftrightarrow (2x + y - 1) + (0i) = 0 + (x + 2y - 5)i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} <=> x = -1, y = 3$

Bài 7 (trang 143 SGK Giải tích 12): Chứng tỏ rằng với mọi số thực z, ta luôn phần thực và phần ảo của nó không vượt quá mô đun của nó.

Lời giải:

Xét số phức $z = a + bi,\ (a;b \in R)$

Mô đun của số phức z là: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

+ Ta có: $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| \geq a$

Và $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{b^2} = |b| \geq b$

Vậy với mọi số phức thì phần thực và phần ảo của nó không vượt quá mô đun của nó.

Bài 8 (trang 143 SGK Giải tích 12): Thực hiện các phép tính *sau*:

a) $(3+2i).\left[(2-i)+(3-2i)\right]$;

b) $(4-3i)+\dfrac{1+i}{2+i}$;

c) $(1+i)^2-(1-i)^2$;

d) $\dfrac{3+i}{2+i}-\dfrac{4-3i}{2-i}$.

Lời giải:

$$= 4 - 3i + \frac{[1.2 - 1.(-1)] + [1.(-1) + 2.1]i}{2^2 + 1^2}$$

$$= (4 - 3i) + \frac{3 + i}{5}$$

$$= \frac{23}{5} - \frac{14}{5}i$$

a) Ta có:

$(3 + 2i).[(2 - i) + (3 - 2i)]$

$= (3 + 2i)(5 - 3i)$

$= (3.5 + 2.3) + (2.5 - 3.3).i$

$= 21 + i.$

c) $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$

$= (1 + i - 1 + i)(1 + i + 1 - i)$

$= 2i.2$

$= 4i$

b) $(4 - 3i) + \frac{1 + i}{2 + i}$

$$= (4 - 3i) + \frac{(1 + i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$$

d) $\frac{3 + i}{2 + i} - \frac{4 - 3i}{2 - i}$

$$= \frac{(3 + i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} - \frac{(4 - 3i)(2 + i)}{(2 + i)(2 - i)}$$

$$= \frac{[3.2 - 1.(-1)] + [3.(-1) + 1.2]i}{2^2 + 1^2}$$

$$- \frac{[4.2 - (-3).1] + (4.1 - 3.2).i}{2^2 + 1^2}$$

$$= \frac{7 - i}{5} - \frac{11 - 2i}{5}$$

$$= \frac{-4}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Bài 9 (trang 144 SGK Giải tích 12): Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a) $(3 + 4i)x + (1 - 3i) = 2 + 5i$;

b) $(4 + 7i)x - (5 - 2i) = 6ix$

Lời giải:

a) $(3 + 4i)z + (1 - 3i) = 2 + 5i$

$\Leftrightarrow (3 + 4i).z = 2 + 5i - (1 - 3i)$

$\Leftrightarrow (3 + 4i).z = 1 + 8i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1+8i}{3+4i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(1+8i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(1.3+8.4)+[1.(-4)+8.3]i}{3^2+4^2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{35+20i}{25}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{7}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

Vậy $z = \dfrac{7}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

b) $(4 + 7i)z - (5 - 2i) = 6i.z$

$\Leftrightarrow (4 + 7i - 6i).z - (5 - 2i) = 0$

$\Leftrightarrow (4 + i).z = 5 - 2i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{5-2i}{4+i}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(5-2i)(4-i)}{(4+i)(4-i)}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(5.4-2.1)+[5.(-1)-2.4]i}{4^2+1^2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{18}{17} - \dfrac{13}{17}i$

Vậy $z = \dfrac{18}{17} - \dfrac{13}{17}i$

Bài 10 (trang 144 SGK Giải tích 12): Giải các phương trình *sau* trên tập số phức:

a) $3z^2 + 7z + 8 = 0$

b) $z^4 - 8 = 0$

c) $z^4 - 1 = 0$

Lời giải:

a) $3z^2 + 7z + 8 = 0$

có $\Delta = 7^2 - 3.4.8 = -47 < 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phức

$$z_{1,2} = \frac{-7 \pm i\sqrt{47}}{6}.$$

b) $z^4 - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(z^2 - 2\sqrt{2}\right)\left(z^2 + 2\sqrt{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 2\sqrt{2} \\ z^2 = -2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm\sqrt{2\sqrt{2}} \\ z = \pm i.\sqrt{2\sqrt{2}} \end{array}\right..$$

c) $z^4 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 1 \\ z^2 = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 1 \\ z = \pm i \end{array}\right.$$

Bài 11 (trang 144 SGK Giải tích 12): Tìm hai số phức, biết tổng của chúng bằng 3 và tích của chúng bằng 4.

Lời giải:

Hai số phức có tổng bằng 3, tích bằng 4 là nghiệm của phương trình:

$z^2 - 3z + 4 = 0$

Phương trình có Δ = 3^2 - 4.4 = -7 < 0

⇒ Phương trình có hai nghiệm: $z_{1,2} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$

Vậy hai số cần tìm là $\dfrac{3+i\sqrt{7}}{2}$ và $\dfrac{3-i\sqrt{7}}{2}$

Bài 12 (trang 144 SGK Giải tích 12): Cho hai số phức z_1,z_2, biết rằng z_1+z_2 và $z_1.z_2$ là hai số thực. Chứng tỏ rằng z_1,z_2 là hai nghiệm của một phương trình bậc hai với hệ số thực.

Lời giải:

Cho các số phức z_1, z_2 khi đó z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình:

$(x - z_1)(x - z_2) = 0$

$x^2 + (z_1 + z_2).x + z_1.z_2 = 0$ (*)

Theo giả thiết $z_1 + z_2$ và $z_1.z_2$ là hai số thực nên phương trình (*) là phương trình bậc hai với hệ số thực.

Kết luận : Phương trình $x^2 + (z_1 + z_2)x + z_1.z_2 = 0$ là phương trình bậc hai với hệ số thực và nhận z_1, z_2 là nghiệm.

Bài 1 (trang 144 SGK Giải tích 12): Số nào trong các số *sau* là số thực?

(A) $\left(\sqrt{3}+2i\right)-\left(\sqrt{3}-2i\right)$;

(B) $\left(2+i\sqrt{5}\right)+\left(2-i\sqrt{5}\right)$.

(C) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2$;

(D) $\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$.

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Ta xét các phương án :

+ Phương án A ta có :

$$(\sqrt{3}+2i)-(\sqrt{3}-2i)$$
$$=\sqrt{3}+2i-\sqrt{3}+2i$$
$$=(\sqrt{3}-\sqrt{3})+(2+2)i=4i$$

+ Phương án B :

$$(2+i\sqrt{5})+(2-i\sqrt{5})$$
$$=2+i\sqrt{5}+2-i\sqrt{5}$$
$$=(2+2)+(\sqrt{5}-\sqrt{5})i=4$$

+ Phương án C :

$$(1+i\sqrt{3})^2=1^2+2.1.\sqrt{3}i+(i\sqrt{3})^2$$
$$=1+2\sqrt{3}i-3=-2+2\sqrt{3}i$$

+ Phương án D :

$$\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}=\frac{(\sqrt{2}+i)^2}{(\sqrt{2}-i).(\sqrt{2}+i)}$$
$$=\frac{2+2\sqrt{2}i+i^2}{(\sqrt{2})^2+1^2}=\frac{1+2\sqrt{2}i}{3}$$

Bài 2 (trang 144 SGK Giải tích 12): Số nào trong các số *sau* là số ảo?

(A) $\left(\sqrt{2}+3i\right)+\left(\sqrt{2}-3i\right)$;

(B) $\left(\sqrt{2}+3i\right)\left(\sqrt{2}-3i\right)$;

(C) $\left(2+2i\right)^2$;

(D) $\dfrac{2+3i}{2-3i}$.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

$$(2+2i)^2 = 2^2 + 2.2.2i + (2i)^2$$
$$= 4 + 8i - 4$$
$$= 8i$$

Bài 3 (trang 144 SGK Giải tích 12): Đẳng thức nào *sau* đây là đẳng thức đúng?

(A). $i^{1977}=-1$

(B). $i^{2345}=i$

(C). $i^{2005}=1$

(D). $i^{2006}=-i$

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Ta có: $i^2 = -1$ nên $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

Khi đó, $i^{2345} = i^{4.586+1} = (i^4)^{586}.i = 1^{586}.\ i = i$.

Bài 4 (trang 144 SGK Giải tích 12): Đẳng thức nào trong các đẳng thức *sau* là đúng?

(A). $(1+i)^8 = -16$

(B). $(1+i)^8 = 16i$

(C). $(1+i)^8 = 16$

(D). $(1+i)^8 = -16i$

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Ta có:

$(1 + i)^8 = [(1 + i)^2]^4$

$= (1 + 2i + i^2)^4$

$= (2i)^4$

$= 2^4 i^4$

$= 2^4$ (vì $i^2 = -1$ nên $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$= 16.$

Bài 5 (trang 144 SGK Giải tích 12): Biết nghịch đảo của số phức z bằng số phức liên hợp của nó, trong các kết luận *sau*, kết luận nào là đúng?

(A). $z \in R$

(B). $|z| = 1$

(C). z là số thuần ảo

(D). $|z| = -1$

Lời giải:

Chọn đáp án B

Với số phức z bất kì ta luôn có:

$$z.\bar{z} = |z|^2 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \ (*)$$

Theo giả thiết ta có:

$\bar{z} = z^{-1}$ thay vào (*) ta được:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^{-1}}{|z|^2} \Leftrightarrow z.z^{-1} = |z|^2 \Leftrightarrow 1 = |z|^2$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1.$$

Bài 6 (trang 144 SGK Giải tích 12): Trong các kết luận *sau*, kết luận nào là sai?

A. Mô đun của số phức z là một số thực

B. Mô đun của số phức z là một số phức

C. Mô đun của số phức z là một số thực dương

D. Mô đun của số phức z là một số thực không âm.

Lời giải:

Chọn đáp án C.

Số phức z = 0 có môđun |z| = 0.

Lý thuyết Toán lớp 12 Ôn tập chương 4 giải tích

A. Tóm tắt lý thuyết

**** SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN**

1. Phần thực và phần ảo của số phức, số phức liên hợp.

a) Số phức z là biểu thức có dạng z = a + bi (a, b ∈ R, $i^2 = -1$) . Khi đó:

+ Phần thực của z là a, phần ảo của z là b và i được gọi là đơn vị ảo.

b) Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = \overline{a+bi} = a - bi$.

+ $z.\bar{z} = a^2 + b^2$

+ Tổng và tích của z và $z-$ luôn là một số thực.

$$+ \ \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}.$$

$$+ \ \overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}.$$

$$+ \ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Đặc biệt:

+ Số phức z = a + 0i có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là z = a

+ Số phức z = 0 + bi có phần thực bằng 0 được gọi là số ảo (hay số thần ảo) và viết là

+ Số i = 0 + li = li.

+ Số: 0 = 0 + 0i vừa là số thực vừa là số ảo.

2. Số phức bằng nhau.

+ Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 + b_2i$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$). Khi đó:

$$\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}}$$

3. Biểu diễn hình học của số phức, mô đun của số phức.

a) Biểu diễn hình học của số phức.

+ Số phức z = a + bi (a, b ∈ R) được biểu diễn bởi điểm M(a; b) trong mặt phẳng tọa độ.

+ z và $\bar{z}$ được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua trục 0x.

b) Mô đun của số phức.

+ Mô đun của số phức z là $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

+ $|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$; $|z| = |\bar{z}|$

4. Cộng, trừ, nhân, chia số phức.

Cho hai số phức z_1 = a + bi và z_2 = c + di thì:

• **Phép cộng số phức:** $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

• **Phép trừ số phức:** $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

• **Phép nhân số phức:** $z_1.z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

• **Phép chia số phức:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i$ (với $z_2 \neq 0$)

**** PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC**

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c ∈ R; a ≠ 0). Xét $\Delta = b^2 - 4ac$, ta có

• Δ = 0: phương trình có nghiệm thực x = -b/2a .

• Δ > 0 : phương trình có hai nghiệm thực được xác định bởi công thức: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• $\Delta < 0$: phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

** ***Chú*** **ý.**

- Mọi phương trình bậc n: $A_0z^n + A_1z^{n-1} + ... + A_{n-1}z + A_n = 0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

- **Hệ thức Vi–ét đối với phương trình bậc hai với hệ số thực:** Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (thực hoặc phức). Ta có hệ thức Vi–ét

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$