Nội dung bài viết

Giải bài tập Toán 12 Bài 4: Phương trình bậc hai với hệ số thực

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 4 trang 139: Thế nào là căn bậc hai của số thực dương a ?

Lời giải:

Căn bậc hai của một số thực dương a là một số thực b sao cho $b^2 = a$.

Bài 1 (trang 140 SGK Giải tích 12): Tìm các căn bậc hai phức của các số sau: -7;-8;-12;-20;-121

Lời giải:

Căn bậc hai của -7 là $\pm i\sqrt{7}$

Căn bậc hai của -8 là $\pm i\,2\sqrt{2}$

Căn bậc hai của -12 là $\pm i2\sqrt{3}$

Căn bậc hai của -20 là $\pm i\,2\sqrt{5}$

Căn bậc hai của -121 là $\pm 11i$

Kiến thức áp dụng

Căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$

Bài 2 (trang 140 SGK Giải tích 12): Giải các phương trình sau trên tập hợp số phức:

a) $-3z^2 + 2z - 1 = 0$

b) $7z^2 + 3z + 2 = 0$

c) $5z^2 - 7z + 11 = 0$

Lời giải:

a) Phương trình $-3z^2 + 2z - 1 = 0$

có $\Delta' = 1^2 - 3 = -2$

Phương trình có hai nghiệm $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{2}}{-3} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}.i$

b) Phương trình $7z^2 + 3z + 2 = 0$

có $\Delta = 3^2 - 4.7.2 = -47 < 0$

⇒ Phương trình có hai nghiệm $x_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{47}}{14}$

c) Phương trình $5z^2 - 7z + 11 = 0$

có $\Delta = 7^2 - 4.5.11 = -171 < 0$

⇒ Phương trình có hai nghiệm $x_{1,2} = \frac{7 \pm i\sqrt{171}}{10}$

Kiến thức áp dụng

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

có $\Delta = b^2 - 4ac$

+ Nếu $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

+ Nếu $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$

+ Nếu $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm ảo phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Bài 3 (trang 140 SGK Giải tích 12): Giải các phương trình *sau* trên tập hợp số phức:

a) $z^4 + z^2 - 6 = 0$

b) $z^4 + 7z^2 + 10 = 0$

Lời giải:

a) $z^4 + z^2 – 6 = 0$

$\Leftrightarrow z^4 – 2z^2 + 3z^2 – 6 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 .(z^2 – 2)+ 3. (z^2 -2) = 0$

$\Leftrightarrow (z^2 – 2)(z^2 + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 2 \\ z^2 = -3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\pm\sqrt{2}; \pm i\sqrt{3}\right\}$

b) $z^4 + 7z^2 + 10 = 0$

$\Leftrightarrow z^4 + 5z^2 + 2z^2 + 10 = 0$

$\Leftrightarrow z^2 (z^2 + 5) + 2.(z^2 + 5) = 0$

$\Leftrightarrow (z^2 + 2)(z^2 + 5) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -2 \\ z^2 = -5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm i\sqrt{2} \\ z = \pm i\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\pm i\sqrt{2}; \pm i\sqrt{5}\right\}$

Kiến thức áp dụng

Căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$

Bài 4 (trang 140 SGK Giải tích 12): Cho a, b, c $\in R, a \neq 0, z_1$, z_2 là hai nghiệm phân biệt (thực hoặc phức) của phương trình $ax^2+bx+c=0$. Hãy tính z_1+z_2 và $z_1.z_2$ theo hệ số a, b, c.

Lời giải:

Cách 1 :

Phương trình $az^2 + bz + c = 0$ có $\Delta = b^2 - 4ac$

+ TH1 : $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $z_{1,2} = \frac{-b \pm i.\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = \frac{-b + i.\sqrt{|\Delta|}}{2a} + \frac{-b - i.\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$= \frac{-b}{a}$$

$$z_1.z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.\frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

$$= \frac{(-b)^2 - \left(i\sqrt{|\Delta|}\right)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - i^2.|\Delta|}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - (-1).\left(4ac - b^2\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

+ TH2: $\Delta \geq 0$, theo định lý Vi-et ta có:

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a};\ z_1.z_2 = \frac{c}{a}.$$

Vậy ta luôn có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a} \\ z_1.z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Cách 2 :

Vì z_1; z_2 là hai nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ nên ta có:

$a.z_1^2 + bz_1 + c = 0$ (1)

$az_2^2 + bz_2 + c = 0$ (2).

+ Trừ hai vế tương ứng của (1) cho (2) ta được:

$a.(z_1^2 - z_2^2) + b(z_1 - z_2) = 0$

$\Leftrightarrow a.(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) + b.(z_1 - z_2) = 0$

$\Leftrightarrow a.(z_1 + z_2) + b = 0$ (Vì z_1 z_2 nên $z_1 - z_2$ 0).

$\Leftrightarrow z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$

$\Rightarrow z_1 = \dfrac{-b}{a} - z_2 \quad (*)$

+ Thay (*) vào (1) ta được:

$$az_1.\left(\frac{-b}{a} - z_2\right) + bz_1 + c = 0$$

$\Leftrightarrow -bz_1 - az_1z_2 + bz_1 + c = 0$

$\Leftrightarrow az_1z_2 - c = 0$

$\Leftrightarrow z_1.z_2 = \dfrac{c}{a}.$

Kiến thức áp dụng

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$

có $\Delta = b^2 - 4ac$

+ Nếu $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

+ Nếu $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$

+ Nếu $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm ảo phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Bài 5 (trang 140 SGK Giải tích 12): Cho z = a + bi là một số phức. Hãy tìm phương trình bậc hai với hệ số thực nhận z và z– làm nghiệm.

Lời giải:

$+ z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

$\Rightarrow z + \bar{z} = 2a;\ z.\bar{z} = |z| = a^2 + b^2$

z và $\bar{z}$ là hai nghiệm của phương trình :

$(x - z)(x - \bar{z}) = 0$

$\Leftrightarrow\ x^2 - x.(z + \bar{z}) + z.\bar{z} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$.

Lý thuyết Toán lớp 12 Bài 4: Phương trình bậc hai với hệ số thực

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Căn bậc hai của số phức: Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w .

2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \in R$; $a \neq 0$). Xét $\Delta = b^2 - 4ac$, ta có

• $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm thực $x = -b/2a$.

• $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm thực được xác định bởi công thức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

• $\Delta < 0$: phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

** ***Chú ý.***

- Mọi phương trình bậc n: $A_0z^n + A_1z^{n-1} + ... + A_{n-1}z + A_n = 0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

- Hệ thức Vi–ét đối với phương trình bậc hai với hệ số thực: Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (thực hoặc phức). Ta có hệ thức Vi–ét

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

B. Kĩ năng giải bài tập

1. Dạng 1: Tìm căn bậc hai của một số phức

• **Trường hợp w là số thực:** Nếu a là một số thực

+ $a < 0$, a có các căn bậc hai là $\pm i\sqrt{|a|}$.

+ $a = 0$, a có đúng một căn bậc hai là 0.

+ $a > 0$, a có hai căn bậc hai là $\pm\sqrt{a}$.

Ví dụ 1: Ta có hai căn bậc hai của – 1 là i và -i. Hai căn bậc hai của $-a^2$ (a là số thực khác 0) là ai và -ai.

• **Trường hợp** $w = a + bi$ ($a,b \in R$, $b \neq 0$)

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in R$) là một căn bậc hai của w khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là

$(x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

Mỗi cặp số thực (x; y) nghiệm đúng hệ phương trình trên cho ta một căn bậc hai $x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

Ví dụ 2: Tìm các căn bậc hai của $w = -5 + 12i$.

Hướng dẫn:

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in R$) là một căn bậc hai của số phức w = -5 _ 12i.

Ta có $z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = -5 + 12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy w = -5 + 12i có hai căn bậc hai là 2 + 3i và -2 - 3i.

2. Dạng 2: Giải phương trình bậc hai với hệ số thực và các dạng toán liên quan

• Giải các phương trình bậc hai với hệ số thực

Ví dụ 3: Giải phương trình bậc hai *sau*: $z^2 - z + 1 = 0$

Hướng dẫn:

Ta có ± = b^2 -4ac = -3 < 0

Phương trình có hai nghiệm phức phân biệt là $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

• Giải phương trình quy về phương trình bậc hai với hệ số thực

Phương pháp 1: Phân tích đa thức thành nhân tử:

– Bước 1: Nhẩm 1 nghiệm đặc biệt của phương trình.

+ Tổng các hệ số trong phương trình là 0 thì phương trình có một nghiệm x = 1.

+ Tổng các hệ số biến bậc chẵn bằng tổng các hệ số biến bậc lẻ thì phương trình có một nghiệm x = -1.

Định lý Bơdu:

Phần dư trong phép chia đa thức f(x) cho x - a bằng giá trị của đa thức f(x) tại x = a

Tức là f(x) = (x - a)g(x) - f(a)

Hệ quả: Nếu f(a) = 0 thì f(x)⋮ (x - a)

Nếu f(x)⋮(x - a) thì f(a) = 0 hay f(x) = 0 có một nghiệm x = a

– Bước 2: Đưa phương trình về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai bằng cách hân tích đa thức ở vế trái của phương trình thành nhân tử (dùng hằng đảng thức, chia đa thức hoặc sử dụng lược đồ Hoocne) như *sau*:

Với đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ chia cho x - a có thương là $g(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0$ dư r

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_2	a_1	a_0
a	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = ab_{n-1}$	$b_{n-3} = ab_{n-2}$	$b_1 = ab_2$	$b_0 = ab_1 + a_1$	$r = ab_0 + b_0$

– Bước 3: Giải phương trình bậc nhất hoặc bậc hai, kết luận nghiệm

Phương *pháp* 2: Đặt ẩn phụ:

– Bước 1: Phân tích phương trình thành các đại lượng có dạng giống nhau.

– Bước 2: Đặt ẩn phụ, nêu điều kiện của ẩn phụ (nếu có).

– Bước 3: Đưa phương trình ban đầu về phương trình bậc nhất, bậc hai với ẩn mới.

– Bước 4: Giải phương trình, kết luận nghiệm.

B. Kĩ năng sử dụng máy tính bỏ túi

1. Chọn chế độ tính toán với số phức: MODE 2 màn hình hiện CMPLX.

Nhập số thuần ảo i: Phím ENG

2. Tìm các căn bậc hai của một số phức

Ví dụ 5: Khai căn bậc hai số phức z = -3-4i có kết quả:

Hướng dẫn:

Cách 1:

– Mode 2 (CMPLX)

– Nhập hàm X^2

– Sử dụng phím CALC, nhập từng giá trị vào, giá trị nào ra kết quả bằng z thì ta nhận.

Cách 2:

– Mode 1 (COMP)

– Nhấn Shift + (Pol), ta nhập Pol(-3;4)

– Nhấn Shift – (Rec), ta nhập Rec(√X,Y:2), ta thu được kết quả X = 1; Y = 2.

– Vậy 2 số phức cần tìm là 1 + 2i và -1 - 2i.