Nội dung bài viết

Với bộ tài liệu giải **sách bài tập toán 12 tập 1 Bài 2: Sự đồng biến**, nghịch biến của hàm số, hướng dẫn cách giải chi tiết cho từng câu hỏi, từng phần học bám sát nội dung chương trình SBT bộ môn Toán lớp 12. Nội dung chi tiết các em xem tại đây.

Giải Bài 1.17 trang 15 SBT toán 12 tập 1

Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = -2x^2 + 7x - 5$

b) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$

c) $y = (x + 2)^2.(x - 3)^3$

Lời giải:

a) $y = -2x^2 + 7x - 5$. TXĐ: R

$y' = -4x + 7$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 7/4$

$y'' = -4 \Rightarrow y''(7/4) = -4 < 0$

Vậy $x = 7/4$ là điểm cực đại của hàm số và $y_{CD} = 9/8$

b) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$. TXĐ: R

$y' = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x^2 - 2x - 8)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Vì $y''(-2) = -18 < 0$, $y''(4) = 18 > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại x = -2; đạt cực tiểu tại x = 4 và $y_{CĐ} = y(-2) = 35$; $y_{CT} = y(4) = -73$.

e) TXĐ: R

$y' = 2(x + 2).(x - 3)^3 + 3(x + 2)^2.(x - 3)^2 = 5x(x + 2).(x - 3)^2$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-108	↗	0	↗	$+\infty$

Từ đó suy ra $y_{CĐ} = y(-2) = 0$; $y_{CT} = y(0) = -108$.

Giải Bài 1.18 trang 15 SBT toán 12 tập 1

Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+1}{x^2+8}$ c) $y = \frac{x^2+x-5}{x+1}$

b) $y = \frac{x^2-2x+3}{x-1}$ d) $y = \frac{(x-4)^2}{x^2-2x+5}$

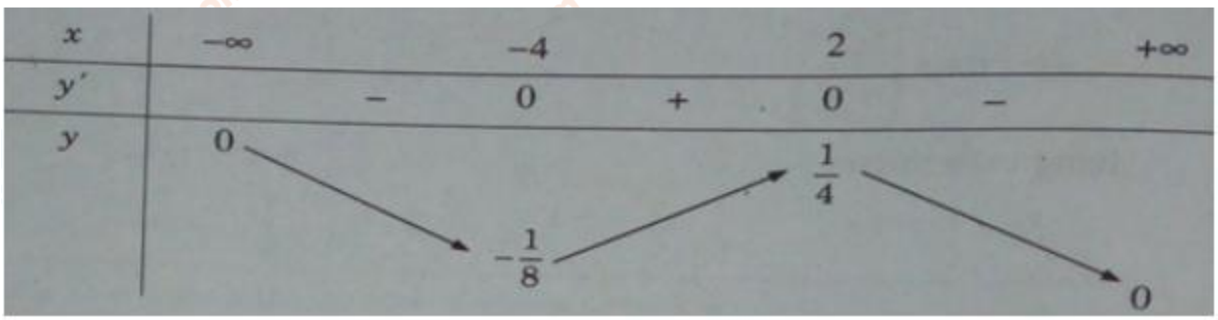
Lời giải:

a) TXĐ : R

$$y' = \frac{x^2+8-2x(x+1)}{(x^2+8)^2} = \frac{-x^2-2x+8}{(x^2+8)^2}$$

y′= 0 ⇔ $\left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



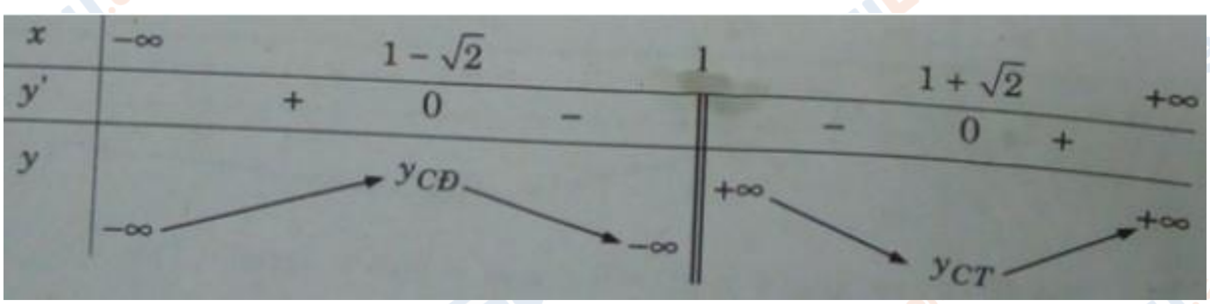
Hàm số đạt cực đại tại x = 2, cực tiểu tại x = -4 và y_{CD} = y(2) = 1/4; y_{CT} = y(−4) = −1/8

b) Hàm số xác định và có đạo hàm với mọi x ≠ 1.

$$y' = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

y′=0 ⇔ $\left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Hàm số đạt cực đại tại x = $1 - \sqrt{2}$ và đạt cực tiểu tại x = $1 + \sqrt{2}$, ta có:

$y_{CD} = y(1 - \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$;

$y_{CT} = y(1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

c) TXĐ: R\{-1}

$$y' = \frac{x^2+2x+6}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng và do đó không có cực trị.

d) Vì $x^2 - 2x + 5$ luôn luôn dương nên hàm số xác định trên $(-\infty; +\infty)$

$$y' = \frac{2(x-4)(x^2-2x+5)-(x-4)^2(2x-2)}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{2(x-4)(3x+1)}{(x^2-2x+5)^2}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{3} \\ x = 4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		4		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	1	↗	y_{CD}	↘	y_{CT}	↗	1

Hàm số đạt cực đại tại x = −1/3, đạt cực tiểu tại x = 4 và $y_{CD} = y(-1/3) = 13/4$; $y_{CT} = y(4) = 0$

Giải Bài 1.19 trang 16 SBT toán 12 tập 1

Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x - 6\sqrt[3]{x^2}$

b) $y = (7 - x)\sqrt[3]{x + 5}$

c) $y = \frac{x}{\sqrt{10 - x^2}}$

d) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 6}}$

Lời giải:

a) TXĐ: R

$$y' = 1 - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt[3]{x}}$$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 64$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		64		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-32	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy ta có $y_{CĐ} = y(0) = 0$ và $y_{CT} = y(64) = -32$.

b) Hàm số xác định trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

$$y' = -\sqrt[3]{x + 5} + \frac{7 - x}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}} = \frac{-4(x+2)}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-5		-2		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$9\sqrt[3]{3}$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $y_{CD} = y(-2) = 9\sqrt[3]{3}$

c) Hàm số xác định trên khoảng $(-\sqrt{10};\sqrt{10})$.

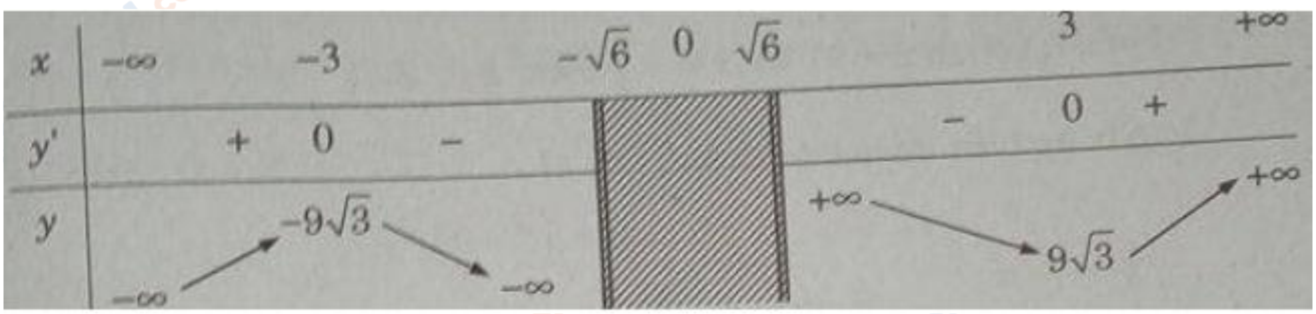
$$y' = \frac{\sqrt{10-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{10-x^2}}}{10-x^2} = \frac{10}{(10-x^2)\sqrt{10-x^2}}$$

Vì y’ > 0 với mọi $(-\sqrt{10};\sqrt{10})$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó và do đó không có cực trị.

d) TXĐ: $D = (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$

$$y' = \frac{3x^2\sqrt{x^2-6} - \frac{x^4}{\sqrt{x^2-6}}}{x^2-6} = \frac{3x^2(x^2-6)-x^4}{\sqrt{(x^2-6)^3}} = \frac{2x^2(x^2-9)}{\sqrt{(x^2-6)^3}}$$

Bảng biến thiên:



Từ đó ta thấy hàm số đạt cực đại tại x = -3, đạt cực tiểu tại x = -3 và $y_{CT} = y(3) = 9\sqrt{3}$; $y_{CD} = y(-3) = -9\sqrt{3}$

Giải Bài 1.20 trang 16 SBT toán 12 tập 1

Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) y = sin2x

b) y = cosx − sinx

c) $y = \sin^2 x$

Lời giải:

a) y = sin2x

Hàm số có chu kỳ T = π

Xét hàm số y=sin2x trên đoạn [0;π], ta có:

y' = 2cos2x

y' = 0 ⇔ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
y'		+	0	−		−	0	+	
y	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0

Do đó trên đoạn [0;π] , hàm số đạt cực đại tại π/4 , đạt cực tiểu tại 3π/4 và y_{CD} = y(π/4) = 1; y_{CT} = y(3π/4) = −1

Vậy trên R ta có:

$y_{CĐ}$ = y(π/4 + kπ) = 1;

y_{CT} = y(3π/4 + kπ) = −1, k∈Z

b) Hàm số tuần hoàn chu kỳ nên ta xét trên đoạn [−π;π].

y′ = − sinx – cosx

y′ = 0 ⇔ tanx = −1 ⇔ x = −π4 + kπ, k∈Z

Lập bảng biến thiên trên đoạn [−π;π]

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
y'		+	0	−	0	+	
y	-1	↗	$\sqrt{2}$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	-1

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\pi 4 + k2\pi$, đạt cực tiểu tại $x = 3\pi 4 + k2\pi$ ($k \in Z$) và

$y_{CĐ} = y(-\pi 4 + k2\pi) = \sqrt{2}$;

$y_{CT} = y(3\pi 4 + k2\pi) = -\sqrt{2}$ ($k \in Z$).

c) Ta có:

$$y = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Do đó, hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ π.

Ta xét hàm số y trên đoạn [0;π]:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$y' = \sin 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi/2$ ($k \in Z$)

Lập bảng biến thiên trên đoạn [0,π]

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'	0	+	0	−	0
y	0	↗	1	↘	0

Từ đó, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = k\pi/2$ với k chẵn, đạt cực đại tại $x = k\pi/2$ với k lẻ, và

$y_{CT} = y(2m\pi) = 0$; $y_{CT} = y(2m\pi) = 0$;

$y_{CĐ} = y((2m+1)\pi/2) = 1$ ($m \in Z$)

Giải Bài 1.21 trang 16 SBT toán 12 tập 1

Xác định giá trị của tham số m để hàm số sau có cực trị:

$y = x^3 + 2mx^2 + mx - 1$

Lời giải:

TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 + 4mx + m$

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu trên R.

$\Leftrightarrow 3x^2 + 4mx + m$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m(4m - 3) > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \frac{3}{4} \end{array}\right.$

Vậy hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu khi m < 0 hoặc m > 3/4.

Giải Bài 1.22 trang 16 SBT toán 12 tập 1

Xác định giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại x = 1. (Đề thi tốt nghiệp THPT năm 2011)

Lời giải:

TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 - 4x + m$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + m = 0$

Phương trình trên có hai nghiệm phân biệt khi:

$\Delta' = 4 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 4/3$ (*)

Hàm số có cực trị tại x = 1 thì :

y'(1) = 3 – 4 + m = 0 ⇒ m = 1 (thỏa mãn điều kiện (∗))

Mặt khác, vì:

y'' = 6x – 4 ⇒ y''(1) = 6 – 4 = 2 > 0

cho nên tại x = 1, hàm số đạt cực tiểu.

Vậy với m = 1, hàm số đã cho đạt cực tiểu tại x = 1

Giải Bài 1.23 trang 16 SBT toán 12 tập 1

Xác định m để hàm số: $y = x^3 - mx^2 + (m - 2/3)x + 5$ có cực trị tại x = 1. Khi đó, hàm số đạt cực tiểu hay đạt cực đại? Tính cực trị tương ứng.

Lời giải:

Ta biết hàm số y = f(x) có cực trị khi phương trình y' = 0 có nghiệm và y' đổi dấu khi qua các nghiệm đó.

Ta có:

Xét y' = 0, ta có: $y' = 3x^2 - 2mx + (m - 2/3)$

Δ' > 0 khi m < 1 hoặc m > 2 (∗)

Để hàm số có cực trị tại x = 1 thì

y′(1) = 3 − 2m + m – 2/3 = 0 ⇔ m = 7/3, thỏa mãn điều kiện (∗)

Với m = 7/3 thì hàm số đã cho trở thành:

$$y = x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 5$$

Ta có:

$$y' = 3x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$y'' = 6x - \frac{14}{3}$$

Vì y″(1) = 6 – (14/3) > 0 nên hàm số đạt cực tiểu tại x = 1 và y_{CT} = y(1) = (16/3).

Giải Bài 1.24 trang 16 SBT toán 12 tập 1

Chứng minh rằng hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -2x \text{ nếu } x \geq 0 \\ \sin\frac{x}{2} \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Không có đạo hàm tại x = 0 nhưng đạt cực đại tại điểm đó.

Lời giải:

Hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} -2x \text{ nếu } x \geq 0 \\ \sin\frac{x}{2} \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Không có đạo hàm tại x = 0 vì:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x}{x} = -2$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2x}{x} = -2$$

Mặt khác, với x < 0 thì $y' = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$

với x > 0 thì y’ = -2 < 0

Bảng biến thiên:

x	$-\pi$		0		π
y'		+		−	
y		↗	0	↘	

Từ đó ta thấy hàm số đạt cực đại tại x = 0 và $y_{CĐ} = y(0) = 0$.

Giải Bài 1.25 trang 16 SBT toán 12 tập 1

Xác định giá trị của tham số m để hàm số sau không có cực trị

$$y = \frac{x^2+2mx-3}{x-m}$$

Lời giải:

Hàm số không có cực trị khi đạo hàm của nó không đổi dấu trên tập xác định R\{m}.

Ta có:

$$y = \frac{x^2+2mx-3}{x-m} \quad y' = \frac{(2x+2m)(x-m)-(x^2+2mx-3)}{(x-m)^2}$$
$$= \frac{2x^2-2m^2-x^2-2mx+3}{(x-m)^2} = \frac{x^2-2mx-2m^2+3}{(x-m)^2}$$

Xét $g(x) = x^2 - 2mx - 2m^2 + 3$

$\Delta'_g = m^2 + 2m^2 - 3 = 3(m^2 - 1)$;

$\Delta'_g \le 0$ khi $-1 \le m \le 1$.

Khi $-1 \le m \le 1$ thì phương trình g(x) = 0 vô nghiệm hay y’ = 0 vô nghiệm và y’ > 0 trên

tập xác định. Khi đó, hàm số không có cực trị.

Khi m = 1 hoặc m = -1, hàm số đã cho trở thành y = x + 3 (với x ≠ 1) hoặc y = x – 3 (với x ≠ - 1) Các hàm số này không có cực trị.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị khi – 1 ≤ m ≤ 1.