

Nội dung bài viết

1. [Giải Bài 2.13 trang 60 SBT toán 12 tập 1](#)
2. [Giải Bài 2.14 trang 60 SBT toán 12 tập 1](#)
3. [Giải Bài 2.15 trang 60 SBT toán 12 tập 1](#)
4. [Giải Bài 2.16 trang 60 SBT toán 12 tập 1](#)
5. [Giải Bài 2.17 trang 61 SBT toán 12 tập 1](#)
6. [Giải Bài 2.18 trang 61 SBT toán 12 tập 1](#)
7. [Giải Bài 2.19 trang 61 SBT toán 12 tập 1](#)
8. [Giải Bài 2.20 trang 61 SBT toán 12 tập 1](#)
9. [Giải Bài 2.21 trang 61 SBT toán 12 tập 1](#)
10. [Giải Bài 2.22 trang 61 SBT toán 12 tập 1](#)
11. [Giải Bài 2.23 trang 61 SBT toán 12 tập 1](#)

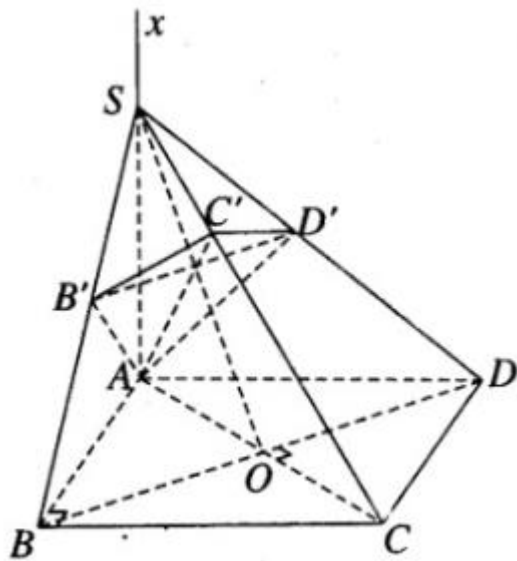
Với bộ tài liệu giải **sách bài tập toán Hình học 12 tập 1 Bài 2: Mặt cầu**, hướng dẫn cách giải chi tiết cho từng câu hỏi, từng phần học bám sát nội dung chương trình SBT bộ môn Toán lớp 12. Nội dung chi tiết các em xem tại đây.

Giai Bài 2.13 trang 60 SBT toán 12 tập 1

Trong mặt phẳng (α) cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a . Trên đường thẳng Ax vuông góc với (α) ta lấy một điểm S tùy ý, dựng mặt phẳng (β) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Mặt phẳng (β) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B' , C' , D' .

- a) Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, B' , C' , D' luôn luôn thuộc một mặt cầu cố định.
- b) Tính diện tích của mặt cầu đó và tính thể tích khối cầu được tạo thành.

Lời giải:



a) Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$$

Ta lại có $AB' \perp SC$ nên suy ra $AB' \perp (SBC)$. Do đó $AB' \perp B'C$

Chứng minh tương tự ta có $AD' \perp D'C$.

$$\text{Vậy } \angle ABC = \angle AB'C = \angle AC'C = \angle AD'C = \angle ADC = 90^\circ$$

Từ đó suy ra 7 điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên mặt cầu đường kính là AC.

b) Gọi r là bán kính mặt cầu

$$r = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

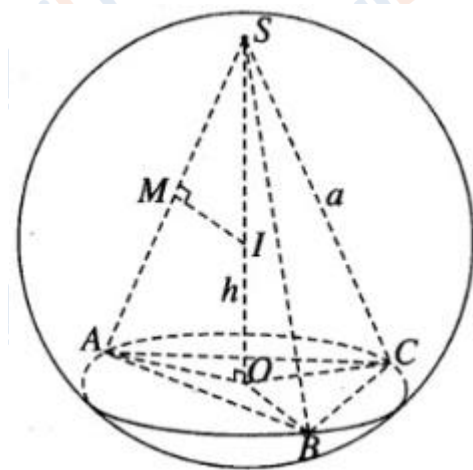
ta có

$$\text{Vậy } S = 4\pi r^2 = \frac{1}{3}\pi a^3 \sqrt{2}$$

Giải Bài 2.14 trang 60 SBT toán 12 tập 1

Hình chóp tam giác S.ABC có $SA = SB = SC = a$ và có chiều cao bằng h. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính diện tích của mặt cầu đó.

Lời giải:



Giả sử ta có mặt cầu tâm I đi qua các đỉnh S, A, B, C của hình chóp. Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo giao tuyến là đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $SA = SB = SC$ nên ta có $SO \perp (ABC)$ và OS là trục của đường tròn tâm O. Do đó $SO \perp AO$. Trong tam giác SAO, đường trung trực của đoạn SA cắt SO tại I và ta được hai tam giác vuông đồng dạng là SIM và SAO, với M là trung điểm của cạnh SA.

Ta có
$$\frac{SI}{SA} = \frac{SM}{SO} = \frac{SA}{2SO}$$

với $SI = IA = IB = IC = r$

Vậy
$$r = SI = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{a^2}{2h}$$

Do đó diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC đã cho là :

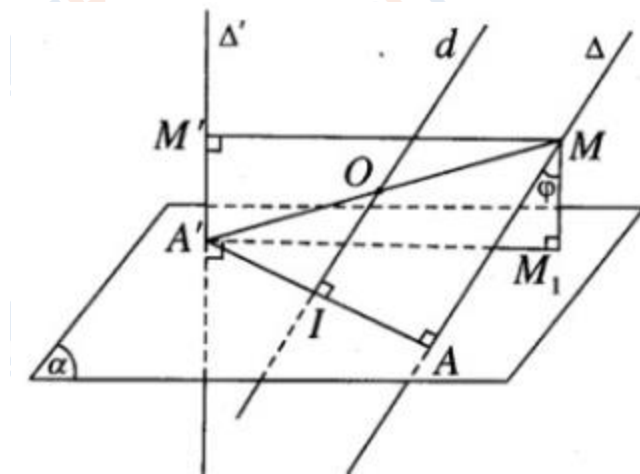
$$r = SI = \frac{SA^2}{2SO} = \frac{a^2}{2h}$$

Giải Bài 2.15 trang 60 SBT toán 12 tập 1

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' có AA' là đoạn vuông góc chung, trong đó $A \in \Delta$ và $A' \in \Delta'$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AA' và vuông góc với Δ' và cho biết $AA' = a$. Một đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với mặt phẳng (α) lần lượt cắt Δ và Δ' tại M và M'. Hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (α) là M_1 .

- a) Xác định tâm O và bán kính r của mặt cầu đi qua 5 điểm A, A', M, M', M_1 .
 Tính diện tích của mặt cầu tâm O nói trên theo $a, x = A'M'$ và góc $\varphi = (\Delta, \Delta')$
- b) Chứng minh rằng khi x thay đổi mặt cầu tâm O luôn luôn chứa một đường tròn cố định.

Lời giải:



- a) Theo giả thiết ta có: $\angle A'M'M = \angle A'AM = \angle A'M_1M = 90^\circ$

Do đó 5 điểm A, A', M, M', M_1 cùng thuộc mặt cầu (S) tâm O , với O là trung điểm của $A'M$ và có bán kính $r = A'M_2$

Mặt khác ta có $A'M^2 = A'A^2 + AM^2$

Trong đó

$$\cos \varphi = \frac{MM_1}{AM}$$

Do đó

$$AM = \frac{MM_1}{\cos \varphi} = \frac{x}{\cos \varphi}$$

$$A'M^2 = a^2 + \frac{x^2}{\cos^2 \varphi}$$

Mặt cầu tâm O có bán kính

$$\Rightarrow A'M = \sqrt{\frac{a^2 \cos^2 \varphi + x^2}{\cos^2 \varphi}} = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + x^2}$$

Diện tích của mặt cầu tâm O là:

$$r = \frac{A'M}{2} = \frac{1}{2 \cos \varphi} \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + x^2}$$

b) Gọi I là trung điểm của đoạn AA'. Ta có IO // Δ nên tâm O di động trên đường thẳng d cố định đi qua I và song song với Δ. Mặt cầu tâm O đi qua hai điểm cố định A, A', có tâm di động trên đường trung trực d cố định của đoạn AA'. Vậy mặt cầu tâm O luôn luôn chứa đường tròn cố định tâm I có đường kính AA' nằm trong mặt phẳng AA' và vuông góc với d.

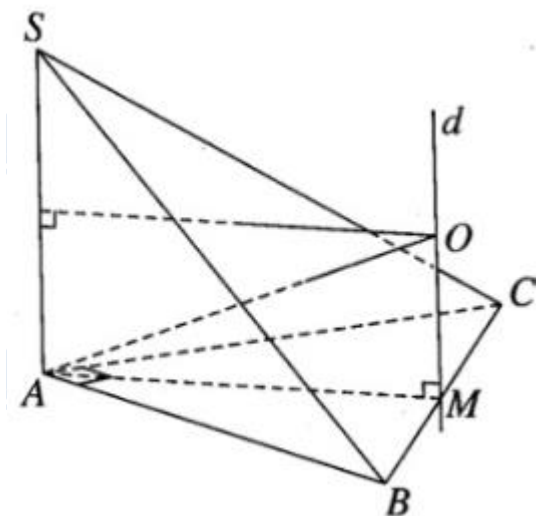
Giải Bài 2.16 trang 60 SBT toán 12 tập 1

Cho tứ diện SABC có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có SA = a, AB = b, AC = c. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện trong các trường hợp sau:

- a) $\angle BAC = 90^\circ$;
- b) $\angle BAC = 60^\circ$ và $b = c$;
- c) $\angle BAC = 120^\circ$ và $b = c$.

Lời giải:

a)



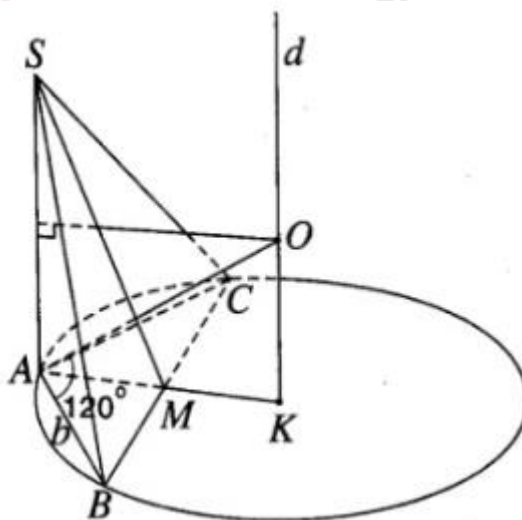
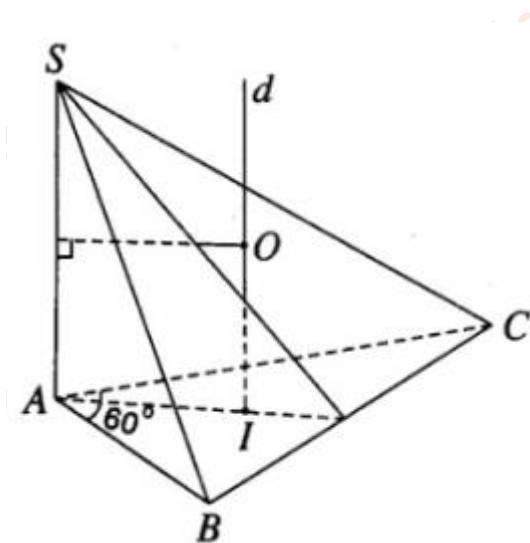
$\angle BAC = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC, ta có $MA = MB = MC$. Dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại M. Mặt phẳng trung trực của đoạn SA cắt d tại O.

Ta có $OS = OA = OB = OC$

$$r^2 = OA^2 = OM^2 + MA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

Do đó ta có hình cầu tâm O ngoại tiếp tứ diện và có

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



b) $\angle BAC = 60^\circ$ và $b = c$, khi đó ABC là tam giác đều cạnh b . Gọi I là trọng tâm của tam giác đều nên I đồng thời cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC . Dựng d là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại I . Mặt phẳng trung trực của đoạn SA cắt d tại O .

Ta có $OS = OA = OB = OC$ và $r^2 = OA^2 = OI^2 + IA^2$

Do đó ta có hình cầu tâm O ngoại tiếp tứ diện và có

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}b\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}$$

Vậy
$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}}$$

c) $\angle BAC = 120^\circ$ và $b = c$, khi đó ABC là một tam giác cân có góc A ở đỉnh bằng 120° và cạnh bên bằng b . Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Kéo dài AM một đoạn $MK = AM$, ta có $KA = KB = KC = AB = AC = b$.

Dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại K . Mặt phẳng trung trực của đoạn SA cắt d tại O .

Ta có: $OS = OA = OB = OC$ và

$$r^2 = OA^2 = OK^2 + KA^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$$

Do đó ta có mặt cầu tâm O ngoại tiếp tứ diện và có bán kính

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

Giải Bài 2.17 trang 61 SBT toán 12 tập 1

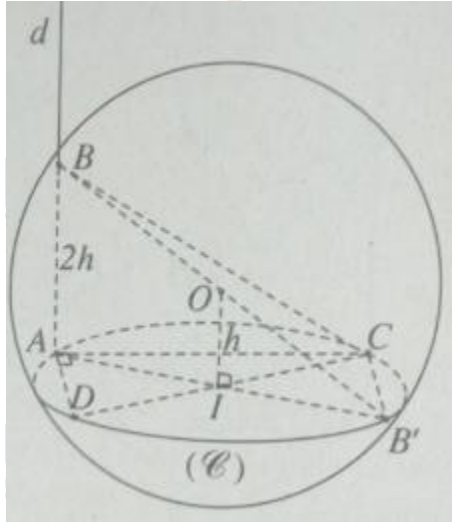
Cho mặt cầu tâm O bán kính r . Gọi (α) là mặt phẳng cách tâm O một khoảng h ($0 < h < r$) và cắt mặt cầu theo đường tròn (C) . Đường thẳng d đi qua một điểm A cố định trên (C) và vuông góc với mặt phẳng (α) cắt mặt cầu tại một điểm B . Gọi CD là đường kính di động của (C)

a) Chứng minh các tổng $AD^2 + BC^2$ và $AC^2 + BD^2$ có giá trị không đổi.

b) Với vị trí nào của CD thì diện tích tam giác BCD lớn nhất?

c) Tìm tập hợp các điểm H, hình chiếu của B trên CD khi CD chuyển động trên đường tròn (C).

Lời giải:



a) Tam giác ADC vuông tại A nên $AD^2 = DC^2 - AC^2$ (1)

Tam giác ABC vuông tại A nên $BC^2 = AC^2 + AB^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $AD^2 + BC^2 = DC^2 + AB^2$ (3)

Ta lại có:

$$AC^2 = DC^2 - AD^2 \text{ và } BD^2 = AD^2 + AB^2 \quad (4)$$

$$DC^2 = 4(r^2 - h^2), AB^2 = 4h^2 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có:

$$AC^2 + BD^2 = DC^2 + AB^2 = 4(r^2 - h^2) + 4h^2 = 4r^2 \quad (6)$$

Từ (3) và (6) ta có: $AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2$ (không đổi)

b) Diện tích tam giác BCD bằng:

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BH \cdot DC$$

Diện tích này lớn nhất khi $AI \parallel CD$.

c) Ta có $AH \perp DC$. Do đó khi CD di động, điểm H luôn luôn nhìn đoạn thẳng AI dưới một góc vuông. Vậy tập hợp các điểm H là đường tròn đường kính AI nằm trong mặt phẳng (α) .

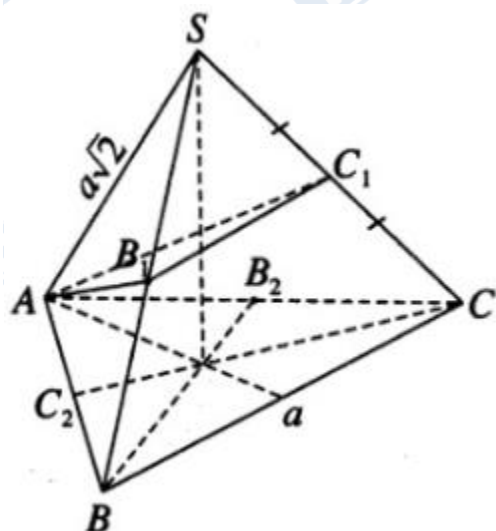
Giải Bài 2.18 trang 61 SBT toán 12 tập 1

Hình chóp $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Một mặt cầu đi qua đỉnh A và tiếp xúc với hai cạnh SB , SC tại trung điểm của mỗi cạnh.

a) Chứng minh rằng mặt cầu đó đi qua trung điểm của AB và AC .

b) Gọi giao điểm thứ hai của mặt cầu với đường thẳng SA là D . Tính độ dài của AD và SD .

Lời giải:



a) Giả sử mặt cầu đi qua đỉnh A của hình chóp và tiếp xúc với cạnh SB tại B_1 , tiếp xúc với cạnh SC tại C_1 . Khi đó mặt cầu cắt cạnh AB , AC lần lượt tại các điểm C_2 , B_2 . Mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu đó theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn này tiếp xúc với SB tại B_1 và đi qua A và C_2 .

Do đó, ta có: $BB_1^2 = BA \cdot BC_2$

trong đó
$$BB_1 = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Do đó $BB_1^2 = \frac{a^2}{2}$

Vậy

$$\frac{a^2}{2} = a \cdot BC_2 \Rightarrow BC_2 = \frac{a^2}{2} : a = \frac{a}{2}$$

Điều đó chứng tỏ mặt cầu nói trên đi qua trung điểm C_2 của đoạn AB . Lí luận tương tự ta chứng minh được mặt cầu đó đi qua trung điểm B_2 của AC .

b) Gọi giao điểm thứ hai của mặt cầu với đường thẳng SA là D , ta có:

$$SD \cdot SA = SB_1^2 \text{ hay } SD \cdot a\sqrt{2} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

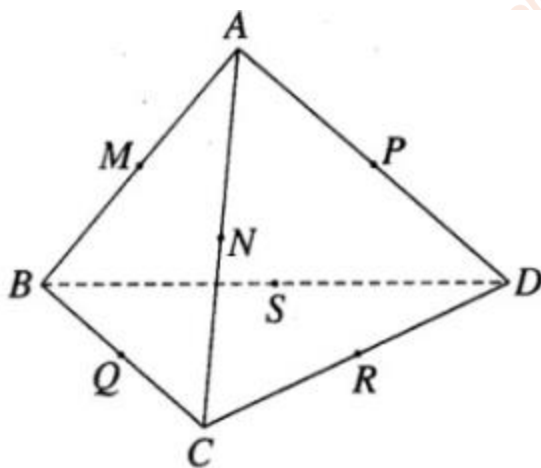
Do đó

$$SD = \frac{a^2}{2} : a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \text{ và } AD = SA - SD = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

Giải Bài 2.19 trang 61 SBT toán 12 tập 1

Chứng minh rằng nếu có một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của một hình tứ diện thì hình tứ diện đó có tổng các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

Lời giải:



Giả sử có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh AB, AC, AD, BC, CD, BD của tứ diện $ABCD$ lần lượt tại M, N, P, Q, R, S . Khi đó AM, AN, AP là các tiếp tuyến cùng xuất phát từ A nên $AM = AN = AP$.

Lập luận tương tự ta có: $BM = BQ = BS$; $CQ = CR = CN$; $DR = DS = DP$

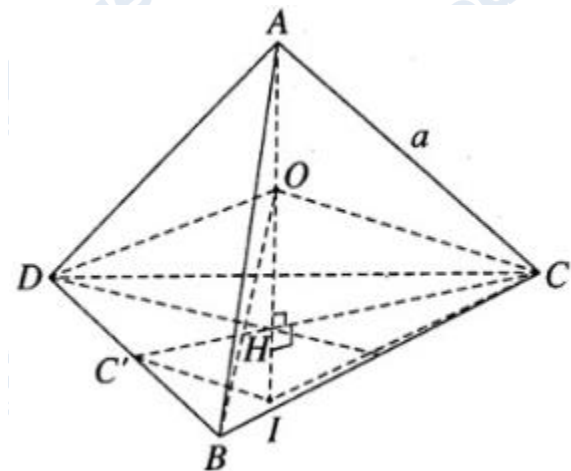
Vậy $AB + CD = AM + MB + CR + RD = AN + BS + CN + DS = AN + NC + BS + SD = AC + BD$

Bằng lí luận tương tự ta chứng minh được $AB + CD = AC + BD = AD + BC$

Giải Bài 2.20 trang 61 SBT toán 12 tập 1

Hình tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và có đường cao AH . Gọi O là trung điểm của AH . Xác định tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OBCD$.

Lời giải:



Gọi H trọng tâm của tam giác đều BCD .

Ta có $AH \perp (BCD)$. Do đó

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

Vậy

$$AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ và } OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Mặt khác $OC^2 = OH^2 + HC^2$

$$= \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{hay } OC = OB = OD = (a\sqrt{2})/2$$

Vì $BD = BC = CD = a$ nên các tam giác DOB , BOC , COD là những tam giác vuông cân tại O . Do đó hình chóp $ODBC$ là hình chóp có đáy là tam giác đều nên tâm của mặt cầu ngoại tiếp phải nằm trên OH , ngoài ra tâm của mặt cầu ngoại tiếp này phải nằm trên trục của tam giác vuông DOB . Từ trung điểm C' của cạnh BD ta vẽ đường thẳng song song với OC cắt đường thẳng OH tại I . Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OBCD$. Mặt cầu này có bán kính là IC và $IC^2 = IH^2 + HC^2$.

Chú ý rằng $IH = OH/2$ (vì $HC' = HC/2$)

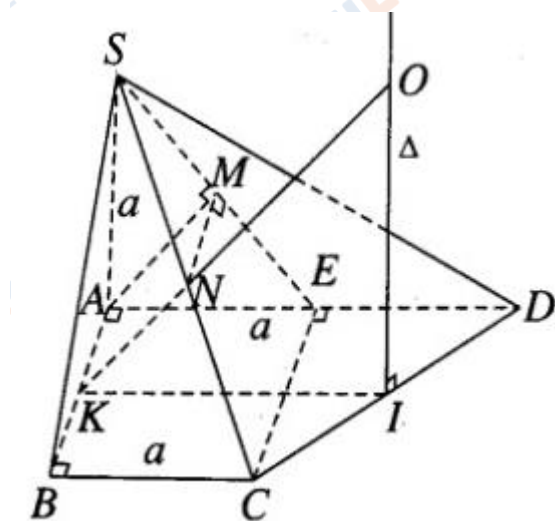
Do đó:

$$IC^2 = \frac{a^2}{24} + \frac{a^2}{3} = \frac{9a^2}{24} \text{ hay } IC = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Giải Bài 2.21 trang 61 SBT toán 12 tập 1

Hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$ là chiều cao của hình chóp và đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = BC = a$ và $AD = 2a$. Gọi E là trung điểm của cạnh AD . Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$

Lời giải:



Tam giác CED là tam giác vuông cân tại E nên trục của đường tròn đi qua ba điểm C, E, D là đường thẳng Δ đi qua trung điểm I của đoạn thẳng CD và song song với SA .

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SE và SC. Ta có mặt phẳng (ABNM) là mặt phẳng trung trực của đoạn SE. Vậy tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.CDE chính là giao điểm của Δ và mp(ABNM). Gọi K là trung điểm của AB thì $KN \parallel AM$ và do đó $KN \parallel (SAE)$. Ta có $IK \parallel AD$ nên $IK \parallel (SAE)$.

Vậy KN và Δ đồng phẳng và ta có O là giao điểm cần tìm.

Chú ý rằng OIK là tam giác vuông cân, vì $\angle OKI = \angle MAE = 45^\circ$

Ta có $OI = IK$, trong đó

$$IK = \frac{BC+AD}{2} = \frac{a+2a}{2} = \frac{3a}{2}$$

Vậy

$$OC^2 = OI^2 + IC^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}$$

$$(\text{vì } CD = a\sqrt{2}; IC = \frac{CD}{2}).$$

Do đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.CDE là:

$$r = OC = \frac{a\sqrt{11}}{2}$$

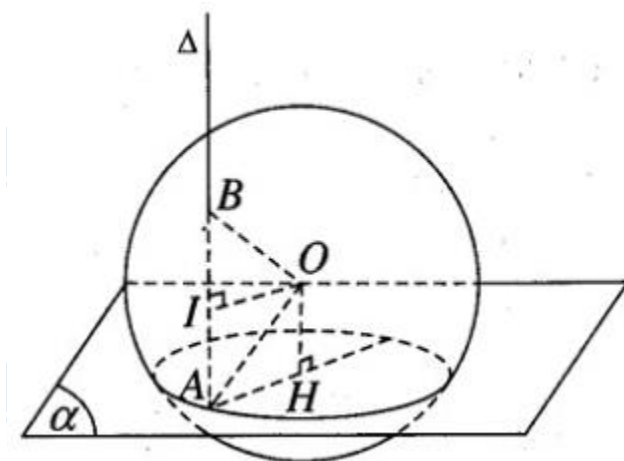
Giải Bài 2.22 trang 61 SBT toán 12 tập 1

Cho hình cầu tâm O bán kính r. Lấy một điểm A trên mặt cầu và gọi (α) là mặt phẳng đi qua A sao cho góc giữa OA và (α) bằng 30° .

a) Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) và hình cầu.

b) Đường thẳng đi qua A vuông góc với mặt phẳng (α) cắt mặt cầu tại B. Tính độ dài đoạn AB.

Lời giải:



a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm O trên mặt phẳng (α) . Theo giả thiết ta có $\angle OAH = 30^\circ$.

Do đó:

$$HA = OA \cdot \cos 30^\circ = r \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy diện tích của thiết diện tạo bởi (α) và hình cầu là:

$$S = \pi \cdot HA^2 = \frac{3\pi r^2}{4}$$

b) Mặt phẳng (ABO) qua tâm O của hình cầu nên cắt mặt cầu theo đường tròn lớn qua A và B. Gọi I là trung điểm của đoạn AB ta có $OI \perp AB$. Vì $AB \parallel OH$ nên AIOH là hình chữ nhật.

Do đó

$$AI = OH = \frac{OA}{2} = \frac{r}{2}$$

Vậy $AB = 2AI = r$

Chú ý: Có thể nhận xét rằng tam giác OAB cân tại O ($OA = OB$) và có góc $\angle OAB = 60^\circ$ nên OAB là tam giác đều và suy ra $AB = OA = OB = r$.

Giải Bài 2.23 trang 61 SBT toán 12 tập 1

Cho hình cầu đường kính $AA' = 2r$. Gọi H là một điểm trên đoạn AA' sao cho $AH = 4r/3$. Mặt phẳng (α) qua H và vuông góc với AA' cắt hình cầu theo đường tròn (C) .

a) Tính diện tích của hình tròn (C) .

b) Gọi BCD là tam giác đều nội tiếp trong (C) , hãy tính thể tích hình chóp $A.BCD$ và hình chóp $A'.BCD$.

Lời giải:

a) Theo giả thiết ta có $AH = 4r/3$

Ta suy ra $OH = r/3$. Gọi r' là bán kính của đường tròn (C) .

Ta có:

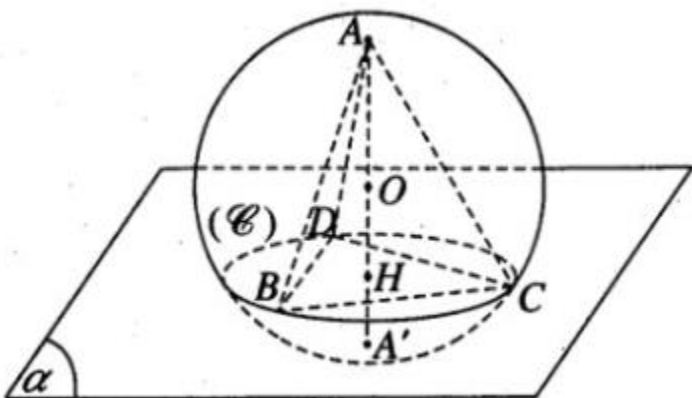
$$r'^2 = r^2 - OH^2 = r^2 - \frac{r^2}{9} = \frac{8r^2}{9}$$

Vậy diện tích của hình tròn (C) là:

$$S = \pi r'^2 = \frac{8\pi r^2}{9}$$

b) Vì BCD là tam giác đều nên ta có:

$$BC = r' \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3} r$$



Diện tích của tam giác đều BCD là:

$$S = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{24r^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2r^2 \sqrt{3}}{3}$$

Thể tích hình chóp A.BCD là:

$$V = \frac{1}{3} \frac{2r^2 \sqrt{3}}{3} \cdot \frac{4r}{3} = \frac{8\sqrt{3}r^3}{27}$$

Hai hình chóp A.BCD và A'.BCD có chung mặt đáy BCD nên:

$$\frac{V_{A'.BCD}}{V_{A.BCD}} = \frac{HA'}{HA} = \frac{1}{2}$$

Do đó

$$V_{A'.BCD} = \frac{4\sqrt{3}r^3}{27}$$

►► **CLICK NGAY** vào nút **TẢI VỀ** dưới đây để tải về **giải bài tập SBT toán hình lớp 12 tập 1 Bài 2: Mặt cầu**, file PDF hoàn toàn miễn phí.