SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÀO CAI
ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Đề thi gồm có 05 trang

ĐỀ THI THỬ TỐT NGHIỆP THPT NĂM 2021
MÔN TOÁN – Khối lớp 12
Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

MÃ ĐỀ 124

Họ và tên học sinh: . . . . Số báo danh: . . . .

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = -f'(x)$. **B.** $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f'(x)$.

C. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = -f(x)$. **D.** $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

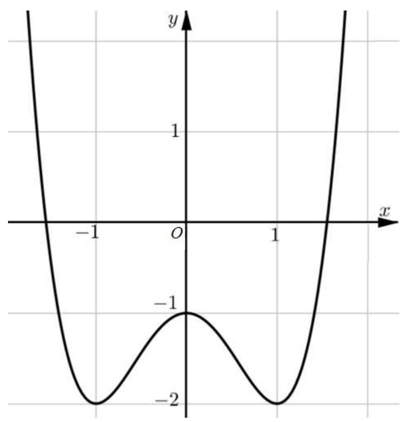
Câu 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_8\left(a^6\right)$ bằng

A. $2+\log_2 a$. **B.** $18\log_2 a$. **C.** $3\log_2 a$. **D.** $2\log_2 a$.

Câu 3. Cho hình chóp có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích khối chóp đã cho là

A. $\frac{4}{3}a^3$. **B.** $16a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $\frac{16}{3}a^3$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào?



A. $(-1;0)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 5. Nghiệm của phương trình $2^{x+1}=8$ là:

A. $x=1$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=4$.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y=\log_3 x$ là:

A. $y'=\frac{x}{\ln 3}$. **B.** $y'=\frac{1}{x\ln 3}$. **C.** $y'=x\ln 3$. **D.** $y'=\frac{1}{x}$.

Câu 7. Viết công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường cao h, bán kính đường tròn R.

A. $S_{xq}=2\pi h$. **B.** $S_{xq}=2\pi Rh$. **C.** $S_{xq}=2Rh$. **D.** $S_{xq}=\pi R^2 h$.

Câu 8. Hàm số dạng $y=ax^4+bx^2+c\,(a\neq 0)$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 9. Cho $\int_1^2 f(x)\,dx = -1$, khi đó $\int_1^2 3f(x)\,dx$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** -4. **D.** -3.

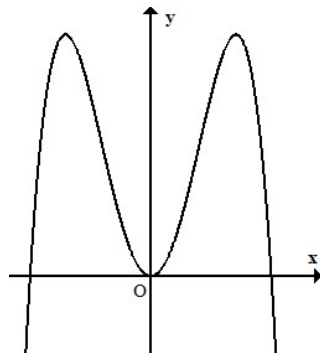
Câu 10. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $4^x = 5$ và $4^y = 3$. Giá trị của 4^{x+y} bằng

A. 10. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 15.

Câu 11. Phương trình $\log_3(5x-1) = 2$ có nghiệm là

A. 2. **B.** $\frac{9}{5}$. **C.** $\frac{11}{5}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Câu 12. Đồ thị hàm số nào có dạng như đường cong hình bên dưới?



A. $y = -x^3 + 2x$. **B.** $y = -x^4 - 4x^2$. **C.** $y = x^3 - 2x$. **D.** $y = -x^4 + 4x^2$.

Câu 13. Đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{x+1}$ cắt trục Oy tại điểm có tọa độ là

A. $(0;1)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $(0;-1)$. **D.** $(1;1)$.

Câu 14. Tích phân $\int_0^1 e^x\,dx$ bằng

A. e. **B.** $e^2 - 1$. **C.** $\frac{e-1}{2}$. **D.** $e - 1$.

Câu 15. Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Khi đó phần ảo của số phức $z_2.z_1$ bằng:

A. -2. **B.** $3i$. **C.** 3. **D.** $-2i$.

Câu 16. Môđun của số phức $z = 2 - 3i$ bằng:

A. 5. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 13.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=5$. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 18. Từ một nhóm gồm 5 học sinh nam và 8 học sinh nữ có bao nhiêu cách chọn ra hai học sinh bất kỳ?

A. 13. **B.** C_{13}^2. **C.** $C_5^2+C_8^2$. **D.** A_{13}^2.

Câu 19. Họ các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ là

A. $\cot x+C$. **B.** $-\tan x+C$. **C.** $-\cot x+C$. **D.** $\tan x+C$.

Câu 20. Một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 3 và thể tích bằng 6 thì chiều cao bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 21. Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ biết $u_1=2,\ u_2=1$. Công bội của cấp số nhân đó là

A. 2. **B.** -2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 22. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $5\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

A. $3\sqrt{2}a$. **B.** $5a$. **C.** $3a$. **D.** $\sqrt{5}a$.

Câu 23. Cho số phức $z=2i+1$. Điểm nào sau đây là điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $H\left(1;2\right)$. **B.** $T\left(2;-1\right)$. **C.** $G\left(1;-2\right)$. **D.** $K\left(2;1\right)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=\left(-3;2;1\right)$ và điểm $A\left(4;6;-3\right)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ là

A. $\left(-1;-8;2\right)$. **B.** $\left(7;4;-4\right)$. **C.** $\left(1;8;-2\right)$. **D.** $\left(-7;-4;4\right)$.

Câu 25. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-x}{2x+1}$ là

A. $x=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=1$. **C.** $x=2$. **D.** $y=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 26. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $y=\tan x$. **B.** $y=3x^3+2$. **C.** $y=\dfrac{4x+1}{x-3}$. **D.** $y=3x^4-1$.

Câu 27. Cho $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_0^1\left[f\left(x\right)-2g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=-8$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. -6. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -5.

Câu 28. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=2a$, $OC=a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(2;1;2\right)$ và bán kính $R=3$.

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9$. **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=3$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$. **D.** $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{2}$ Điểm nào dưới đây không thuộc Δ?

A. $M(0;2;1)$. **B.** $N(1;0;1)$. **C.** $F(3;-4;5)$. **D.** $E(2;-2;3)$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$ và $C(-10;5;3)$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

A. $\vec{n}=(1;2;0)$. **B.** $\vec{n}=(1;2;2)$. **C.** $\vec{n}=(1;-2;2)$. **D.** $\vec{n}=(1;8;2)$.

Câu 32. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4}>\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2}$ là

A. $(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-6)\cup(1;+\infty)$.

C. $(-1;6)$. **D.** $(-6;1)$.

Câu 33. Cho hai số phức $z_1=2-i,\ z_2=2-4i$. Tính $|z_1+z_1.z_2|$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** 1. **C.** $5\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 34. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$. Giá trị $5M-3m$ bằng

A. 8. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z+5=0$. Bán kính mặt cầu (S) là:

A. $R=\sqrt{14}$. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 36. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ một hộp gồm 5 viên bi đen và 4 viên bi trắng. Xác suất để 2 bi được chọn cùng màu là:

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{9}$.

Câu 37. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và $B'C'$; α là góc giữa MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Tính giá trị của $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\sin\alpha=\frac{1}{2}$. **D.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn: $\int_0^m|3x^2-2x|\mathrm{d}x=m-10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 39. Cho hàm số $y=(x+m)^3-3(x+m)+1+n$. Biết rằng hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=2$. **C.** $m+n=-1$. **D.** $m+n=1$.

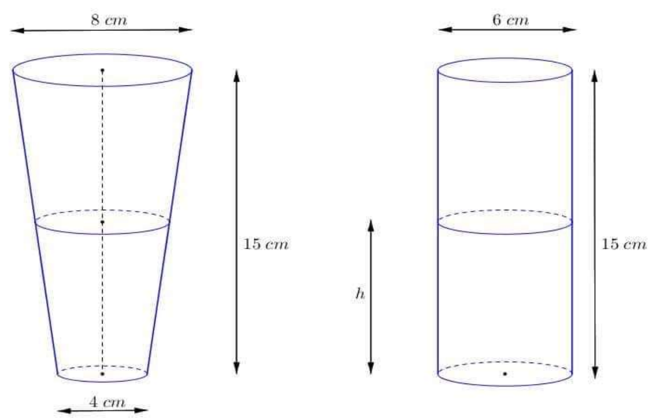
Câu 40. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2^2}\in\mathbb{R}$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$. Tính môđun của số phức z_1.

A. $|z_1|=2$. **B.** $|z_1|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1|=3$. **D.** $|z_1|=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;-3;2)$, $B(6;1;-7)$ và $C(2;8;-1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$. **C.** $\frac{x}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-3}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$.

Câu 42. Lon nước ngọt có hình trụ còn cốc nước thì có hình nón cụt (như hình vẽ dưới đây). Khi rót nước ngọt từ lon ra cốc thì chiều cao h của phần nước ngọt còn lại trong lon và chiều cao của phần nước ngọt có trong cốc là như nhau. Hỏi khi đó chiều cao h của nước trong lon gần nhất là số nào sau đây?



A. $9{,}18\,\text{cm}$. **B.** $14{,}2\,\text{cm}$. **C.** $8{,}58\,\text{cm}$. **D.** $7{,}5\,\text{cm}$.

Câu 43. Cho số thực dương x bất kì và số thực dương $y\neq 1$ thỏa mãn: $x^{\ln y-1}.y^{\sqrt{4-\ln^2 x}}=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\log_y x$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** $-4\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1-t\end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-3=0$.

Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α), cắt và vuông góc với đường thẳng d là:

A. $\begin{cases}x=1\\y=1-2t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=1+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1\\y=1-t\\z=1+t\end{cases}$

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, E là điểm trên cạnh AD sao cho BE vuông góc với AC tại H và $AB > AE$, cạnh SH vuông góc với mặt phẳng đáy, góc $\widehat{BSH} = 45^0$. Biết $AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$, $BE = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{32a^3\sqrt{5}}{15}$. **B.** $\dfrac{16a^3}{3\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{32a^3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{8a^3\sqrt{5}}{5}$.

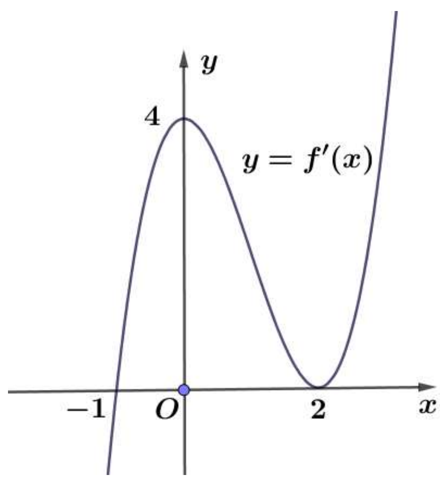
Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $e^{e^{2x}-a} - 2x - a = 0$ có nhiều nghiệm nhất là

A. $a \geq 0$. **B.** $a > 1$. **C.** $a < e$. **D.** $a \geq -1$.

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;0)$, $B(-1;2;4)$. Xét hình trụ (T) nội tiếp mặt cầu đường kính AB và có trục nằm trên đường thẳng AB. Khi thể tích của khối trụ (T) đạt giá trị lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (T) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $C\left(0;-1;-2\sqrt{3}\right)$. **B.** $C\left(0;-1;2\sqrt{3}\right)$. **C.** $C\left(1;0;-2\sqrt{3}\right)$. **D.** $C\left(-1;0;2\sqrt{3}\right)$.

Câu 48. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$ có đồ thị (C) của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Đặt $g(x) = f\left(f'(x)\right)$, $h(x) = f'\left(f(x)\right)$. Tổng số điểm cực trị của hàm số $g(x), h(x)$ là:

A. 12. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 49. Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C_1) đi qua điểm $A(1;0)$; hàm số bậc hai $y = g(x)$ có đồ thị (C_2) đi qua điểm $B(1;-4)$. $(C_1),(C_2)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1;2;3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1),(C_2)$

A. $\dfrac{115}{3}$. **B.** $\dfrac{32}{3}$. **C.** $\dfrac{71}{6}$. **D.** $\dfrac{112}{3}$.

Câu 50. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 1 - i| = 1$, $|z_2 - 2 + i| = 2$. Số phức z thỏa mãn $\left(\overline{z} - \overline{z_1}\right)(1 + i - z_1)$ và $\left(\overline{z} - \overline{z_2}\right)(2 - i - z_2)$ là các số thuần ảo. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - 3 - 2i|$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

__________________ **HẾT** __________________

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.A	4.A	5.C	6.B	7.B	8.D	9.D	10.D
11.A	12.D	13.A	14.D	15.C	16.B	17.A	18.B	19.A	20.A
21.C	22.B	23.C	24.C	25.D	26.B	27.C	28.B	29.D	30.A
31.B	32.D	33.C	34.B	35.D	36.A	37.B	38.A	39.A	40.A
41.B	42.C	43.B	44.D	45.A	46.B	47.D	48.D	49.C	50.A

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = -f'(x)$. **B.** $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f'(x)$.

C. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = -f(x)$. **D.** $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

Lời giải

Ta có: $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

Câu 2. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_8\left(a^6\right)$ bằng

A. $2+\log_2 a$. **B.** $18\log_2 a$. **C.** $3\log_2 a$. **D.** $2\log_2 a$.

Lời giải

Ta có: $\log_8\left(a^6\right) = \log_{2^3}\left(a^6\right) = \frac{6}{3}\log_2 a = 2\log_2 a$.

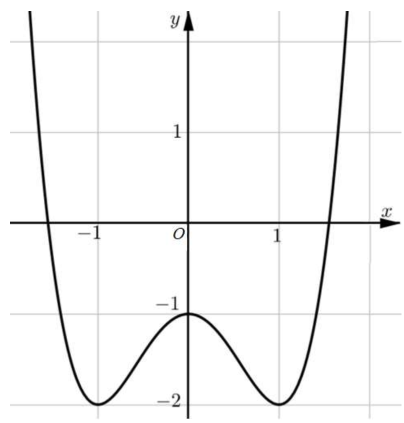
Câu 3. Cho hình chóp có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích khối chóp đã cho là

A. $\frac{4}{3}a^3$. **B.** $16a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $\frac{16}{3}a^3$.

Lời giải

Thể tích của khối chóp đã cho là: $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}a^2.4a = \frac{4}{3}a^3$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào?



A. $(-1;0)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, suy ra hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 5. Nghiệm của phương trình $2^{x+1} = 8$ là:

A. $x = 1$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 4$.

Lời giải

Ta có $2^{x+1} = 8 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^3 \Leftrightarrow x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy nghiệm của phương trình $2^{x+1} = 8$ là $x = 2$.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$ là:

A. $y' = \dfrac{x}{\ln 3}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{x\ln 3}$. **C.** $y' = x\ln 3$. **D.** $y' = \dfrac{1}{x}$.

Lời giải

Tập xác định $D = (0;+\infty)$.

Ta có $\left(\log_3 x\right)' = \dfrac{1}{x.\ln 3}$.

Câu 7. Viết công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường cao h, bán kính đường tròn R.

A. $S_{xq} = 2\pi h$. **B.** $S_{xq} = 2\pi Rh$. **C.** $S_{xq} = 2Rh$. **D.** $S_{xq} = \pi R^2 h$.

Lời giải

Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường cao h, bán kính đường tròn R là $S_{xq} = 2\pi Rh$.

Câu 8. Hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c\left(a \neq 0\right)$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c\left(a \neq 0\right)$ có nhiều nhất 3 điểm cực trị.

Câu 9. Cho $\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = -1$, khi đó $\int\limits_1^2 3f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** -4. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\int\limits_1^2 3f\left(x\right)\mathrm{d}x = 3\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 3.(-1) = -3.$

Câu 10. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $4^x = 5$ và $4^y = 3$. Giá trị của 4^{x+y} bằng

A. 10. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 15.

Lời giải

Ta có $4^{x+y} = 4^x.4^y = 5.3 = 15$.

Câu 11. Phương trình $\log_3\left(5x-1\right) = 2$ có nghiệm là

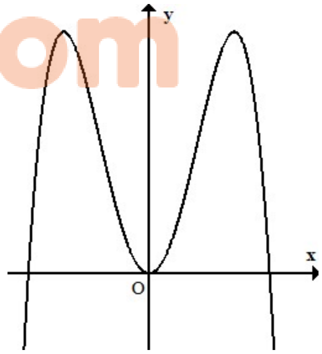
A. 2. **B.** $\dfrac{9}{5}$. **C.** $\dfrac{11}{5}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Lời giải

Ta có $\log_3\left(5x-1\right) = 2 \Leftrightarrow 5x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Câu 12. Đồ thị hàm số nào có dạng như đường cong hình bên dưới?



A. $y=-x^3+2x$. **B.** $y=-x^4-4x^2$. **C.** $y=x^3-2x$. **D.** $y=-x^4+4x^2$.

Lời giải

+ Đồ thị đã cho có dạng của đồ thị hàm số bậc 4, suy ra loại phương án **A**, **C**.

+ Xét hàm số $y=-x^4-4x^2$ có $y'=-4x\left(x^2+2\right)$, $y'=0 \Leftrightarrow x=0$, suy ra hàm số $y=-x^4-4x^2$ có 1 điểm cực trị. Loại phương án **B**.

Vậy đồ thị hàm số $y=-x^4+4x^2$ có dạng như hình vẽ đã cho.

Câu 13. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{x+1}$ cắt trục Oy tại điểm có tọa độ là

A. $(0;1)$. **B.** $(1;0)$. **C.** $(0;-1)$. **D.** $(1;1)$.

Lời giải

Cho $x=0$, ta được $y=\dfrac{1-0}{0+1}=1$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{x+1}$ cắt trục Oy tại điểm có tọa độ là $(0;1)$.

Câu 14. Tích phân $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$ bằng

A. e. **B.** e^2-1. **C.** $\dfrac{e-1}{2}$. **D.** $e-1$.

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = \left.e^x\right|_0^1 = e-1$.

Vậy $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e-1$.

Câu 15. Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=1+2i$. Khi đó phần ảo của số phức $z_2.z_1$ bằng:

A. -2. **B.** $3i$. **C.** 3. **D.** $-2i$.

Lời giải

Ta có $z_2.z_1=(1+2i).(2-i)=4+3i$.

Vậy phần ảo của số phức $z_2.z_1$ là 3.

Câu 16. Môđun của số phức $z=2-3i$ bằng:

A. 5. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 13.

Lời giải

Môđun của số phức $z = 2-3i$ là $|z| = |2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 5$. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy ngay hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 18. Từ một nhóm gồm 5 học sinh nam và 8 học sinh nữ có bao nhiêu cách chọn ra hai học sinh bất kỳ?

A. 13. **B.** C_{13}^2. **C.** $C_5^2 + C_8^2$. **D.** A_{13}^2.

Lời giải

Nhóm có $5+8=13$ học sinh.

Số cách chọn hai học sinh bất kỳ từ 13 học sinh là C_{13}^2.

Câu 19. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ là

A. $\cot x + C$. **B.** $-\tan x + C$. **C.** $-\cot x + C$. **D.** $\tan x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int -\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \cot x + C$.

Câu 20. Một khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 3 và thể tích bằng 6 thì chiều cao bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Thể tích của khối lăng trụ là: $V = B.h$.

Theo bài ra: $6 = 3h \Leftrightarrow h = 2$.

Vậy chiều cao của khối lăng trụ bằng 2

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 2,\ u_2 = 1$. Công bội của cấp số nhân đó là

A. 2. **B.** -2. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n), ta có $u_2 = u_1.q \Leftrightarrow q = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy công bội của cấp số nhân bằng $\dfrac{1}{2}$.

Câu 22. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $5\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

A. $3\sqrt{2}a$. **B.** $5a$. **C.** $3a$. **D.** $\sqrt{5}a$.

Lời giải

Gọi l, r lần lượt là độ dài đường sinh, bán kính đáy của hình nón.

Ta có $S_{xq} = \pi rl = 5\pi a^2 \Leftrightarrow \pi.a.l = 5\pi a^2 \Leftrightarrow l = 5a$.

Vậy độ dài đường sinh của hình nón bằng $5a$.

Câu 23. Cho số phức $z = 2i + 1$. Điểm nào sau đây là điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$ trên mặt phẳng tọa độ?

A. $H(1;2)$. **B.** $T(2;-1)$. **C.** $G(1;-2)$. **D.** $K(2;1)$.

Lời giải

Ta có: $z = 2i + 1 \Rightarrow \overline{z} = 1 - 2i$.

Vậy điểm biểu diễn của số phức $\overline{z}$ trên mặt phẳng tọa độ là điểm $G(1;-2)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ là

A. $(-1;-8;2)$. **B.** $(7;4;-4)$. **C.** $(1;8;-2)$. **D.** $(-7;-4;4)$.

Lời giải

Gọi $B(x;y;z)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x-4;\, y-6;\, z+3)$.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=-3 \\ y-6=2 \\ z+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=8 \\ z=-2 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ của điểm B là $B(1;8;-2)$.

Câu 25. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2-x}{2x+1}$ là

A. $x = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = 2$. **D.** $y = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-x}{2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{2}{x}-1}{2+\frac{1}{x}} = -\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-x}{2x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{2}{x}-1}{2+\frac{1}{x}} = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 26. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $y=\tan x$. **B.** $y=3x^3+2$. **C.** $y=\dfrac{4x+1}{x-3}$. **D.** $y=3x^4-1$.

Lời giải

+ Hàm số $y=\tan x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$. Suy ra hàm số $y=\tan x$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$,

+ Hàm số $y=3x^3+2$ có $y'=9x^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$; $y'=0\Leftrightarrow x=0$. Suy ra hàm số $y=3x^3+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Hàm số $y=\dfrac{4x+1}{x-3}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Suy ra hàm số $y=\dfrac{4x+1}{x-3}$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Hảm số $y=3x^4-1$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$, $y'=12x^3$; $y'\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$. Suy ra hàm số $y=3x^4-1$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy trong các hàm số đã cho, hàm số $y=3x^3+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 27. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_0^1\left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x=-8$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

A. -6. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

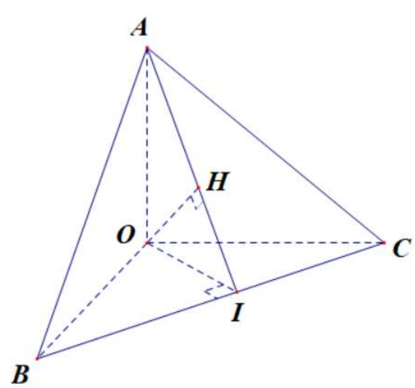
$$\int\limits_0^1\left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x=-8\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1 2g(x)\mathrm{d}x=-8$$

$$\Leftrightarrow 2-2\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x=-8\Leftrightarrow\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x=5.$$

Câu 28. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=2a$, $OC=a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải



Gọi I là hình chiếu vuông góc của O lên BC và H là hình chiếu vuông góc của O lên AI.

Ta có $\begin{cases}OA\perp OB\\OA\perp OC\end{cases}\Rightarrow OA\perp BC$.

Khi đó $\begin{cases}BC\perp OA\\BC\perp OI\end{cases}\Rightarrow BC\perp(OAI)\Rightarrow BC\perp OH$, đồng thời $OH\perp AI$ nên $OH\perp(ABC)$.

Do đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng OH.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OI^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}=\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow OH=a$.

Vậy khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng a.

Nhận xét: Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc thì

(1) Khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (ABC) được tính theo công thức $\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$.

(2) H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng $(ABC)\Leftrightarrow H$ là trực tâm của ΔABC.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;2)$ và bán kính $R=3$.

A. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=9$.
B. $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=3$.
C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3$.
D. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$.

Lời giải

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;2)$ và bán kính $R=3$ có phương trình là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{2}$ Điểm nào dưới đây không thuộc Δ ?

A. $M(0;2;1)$.
B. $N(1;0;1)$.
C. $F(3;-4;5)$.
D. $E(2;-2;3)$.

Lời giải

Thay tọa độ điểm $M(0;2;1)$ vào phương trình chính tắc của đường thẳng Δ ta được một mệnh đề sai: $\dfrac{0-1}{1}=\dfrac{2}{-2}=\dfrac{1-1}{2}$. Suy ra điểm $M(0;2;1)$ không thuộc đường thẳng Δ.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;3)$, $B(4;0;1)$ và $C(-10;5;3)$. Vecto nào dưới đây là vecto pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

A. $\vec{n}=(1;2;0)$.
B. $\vec{n}=(1;2;2)$.
C. $\vec{n}=(1;-2;2)$.
D. $\vec{n}=(1;8;2)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-12;6;0)$.

Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(12;24;24)=12(1;2;2)$.

Suy ra $\vec{n}=(1;2;2)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Câu 32. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x-4}>\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2}$ là:

A. $(-\infty;-1)\cup(6;+\infty)$.
B. $(-\infty;-6)\cup(1;+\infty)$.
C. $(-1;6)$.
D. $(-6;1)$.

Lời giải

Ta có $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-4} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-3x+2} \Leftrightarrow 2x-4 < -x^2-3x+2 \Leftrightarrow x^2+5x-6<0 \Leftrightarrow -6<x<1$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $S=(-6;1)$.

Câu 33. Cho hai số phức $z_1=2-i,\ z_2=2-4i$. Tính $|z_1+z_1.z_2|$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** 1. **C.** $5\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có $z_1.z_2=-10i$; $z_1+z_1.z_2=2-11i$.

Vậy $|z_1+z_1.z_2|=5\sqrt{5}$.

Câu 34. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$. Giá trị $5M-3m$ bằng

A. 8. **B.** 10. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

+) Hàm số $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ liên tục trên đoạn $[0;4]$.

+) Ta có $f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}>0, \forall x\in[0;4]$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $(0;4)$.

+) Khi đó $m=\min\limits_{[0;4]} f(x)=f(0)=-1$; $M=\max\limits_{[0;4]} f(x)=f(4)=\frac{7}{5}$.

Vậy $5M-3m=10$.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z+5=0$. Bán kính mặt cầu (S) là:

A. $R=\sqrt{14}$. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Ta có phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=2 \\ d=5 \end{cases}$.

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;2)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=2$.

Câu 36. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ một hộp gồm 5 viên bi đen và 4 viên bi trắng. Xác suất để 2 bi được chọn cùng màu là:

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp 9 viên bi ta có $C_9^2=36$ (cách) $\Rightarrow n(\Omega)=36$.

Gọi A là biến cố "Hai viên bi được chọn cùng màu".

Trường hợp 1: Hai bi được chọn cùng màu đen. Có $C_5^2 = 10$ (cách).

Trường hợp 2: Hai bi được chọn cùng màu trắng. Có $C_4^2 = 6$ (cách).

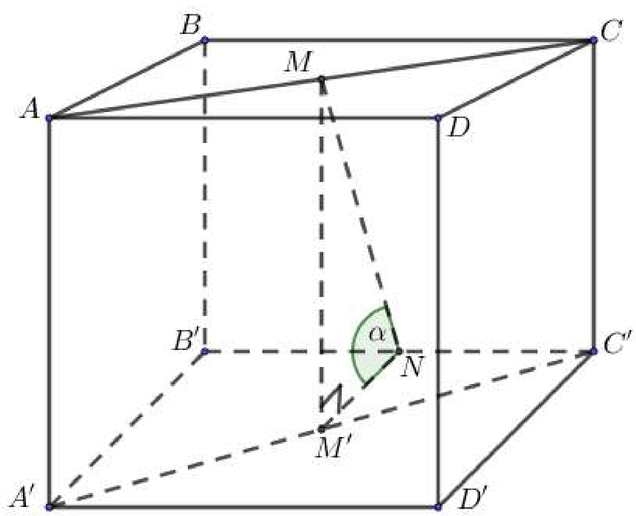
$\Rightarrow n(A) = 10 + 6 = 16$.

Vậy xác suất của biến cố A là $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{16}{36} = \dfrac{4}{9}$.

Câu 37. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và $B'C'$; α là góc giữa MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Tính giá trị của $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



Gọi M' là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$. Khi đó M' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và ta có $MM' \perp (A'B'C'D')$ (do $MM' // AA'$ và $AA' \perp (A'B'C'D')$).

Từ đó ta suy ra $M'N$ là hình chiếu vuông góc của MN trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

Do đó $(MN, (A'B'C'D')) = (MN, M'N) = \widehat{MNM'} = \alpha$.

Gọi a là độ dài cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Khi đó ta có $MM' = AA' = a$ và $M'N = \dfrac{A'B'}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Tam giác $MM'N$ vuông tại M' nên có $MN = \sqrt{MM'^2 + M'N^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{5a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\sin\alpha = \sin\widehat{MNM'} = \dfrac{MM'}{MN} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m thỏa mãn: $\int\limits_0^m \left|3x^2 - 2x\right| dx = m - 10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $I=\int_0^m\left|3x^2-2x\right|\mathrm{d}x$.

Bảng xét dấu của $3x^2-2x$:

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x^2-2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta xét các trường hợp sau:

+) Trường hợp 1: $m\le 0$.

Khi đó $I=\int_0^m\left(3x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\left(x^3-x^2\right)\Big|_0^m=m^3-m^2$.

Suy ra $I=m-10\Leftrightarrow m^3-m^2=m-10\Leftrightarrow m=-2$, (thỏa mãn).

+) Trường hợp 2: $0<m<10$.

Khi đó $I\ge 0$ (do $\left|3x^2-2x\right|\ge 0,\forall x$) và $m-10<0$ nên $0<m<10$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 3: $m>10$.

Khi đó

$$I=\int_0^m\left|3x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{2}{3}}-\left(3x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{2}{3}}^m\left(3x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\left(-x^3+x^2\right)\Big|_0^{\frac{2}{3}}+\left(x^3-x^2\right)\Big|_{\frac{2}{3}}^m=m^3-m^2+\frac{8}{27}.$$

Suy ra $I=m-10\Leftrightarrow m^3-m^2+\frac{8}{27}=m-10\Leftrightarrow m^3-m^2-m+\frac{278}{27}=0$.

Ta có: $m^3-m^2-m+10+\frac{8}{27}=(m+2)\left(m^2-3m+5\right)+\frac{8}{27}>0,\forall m\ge 10$.

Suy ra trong trường hợp này không có m thỏa mãn.

Vậy $m=-2$.

Câu 39. Cho hàm số $y=(x+m)^3-3(x+m)+1+n$. Biết rằng hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=2$. **C.** $m+n=-1$. **D.** $m+n=1$.

Lời giải

Ta có: $y'=3(x+m)^2-3$.

Suy ra: $y'=0\Leftrightarrow 3(x+m)^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+m=1\\x+m=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-m\\x=-1-m\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		$-1-m$		$1-m$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1-m;1-m)$.

Hàm số nghịch biến trên trên khoảng $(0;2)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-1-m\le 0\\1-m\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\ge -1\\m\le -1\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-1$.

Với $m=-1$ ta có $y=(x-1)^3-3(x-1)+1+n$; $y'=3(x-1)^2-3$.

$y'=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\notin[-1;1] \\ x=0\in[-1;1] \end{array}\right.$.

Ta có $y(-1)=n-1$, $y(0)=n+3$, $y(1)=n+1$.

Suy ra $\max\limits_{[-1;1]} y=n+3$.

$\max\limits_{[-1;1]} y=4 \Leftrightarrow n+3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow n=1$.

Vậy $m+n=(-1)+1=0$.

Câu 40. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2^2}\in\mathbb{R}$ và $|z_1-z_2|=2\sqrt{3}$. Tính môđun của số phức z_1.

A. $|z_1|=2$. **B.** $|z_1|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1|=3$. **D.** $|z_1|=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Đặt $z_1=a+bi,(a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow z_2=\overline{z_1}=a-bi$.

Điều kiện: $\overline{z_1}\neq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2\neq 0$.

Ta có $|z_1-z_2|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow |a+bi-a+bi|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2|b|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow |b|=\sqrt{3} \Leftrightarrow b^2=3$.

$$\frac{z_1}{z_2^2}=\frac{z_1}{\left(\overline{z_1}\right)^2}=\frac{z_1^3}{\left(z_1.\overline{z_1}\right)^2}=\frac{(a+bi)^3}{\left(a^2+b^2\right)^2}=\frac{a^3-3ab^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}+\frac{3a^2b-b^3}{\left(a^2+b^2\right)^2}i.$$

Vì $\frac{z_1}{z_2^2}\in\mathbb{R}$ nên $3a^2b-b^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0\ (\text{KTM}) \\ b^2=3a^2\ (*) \end{array}\right.$.

Thay $b^2=3$ vào $(*)$ ta được $a^2=1$.

Vậy $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+3}=2$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(4;-3;2)$, $B(6;1;-7)$ và $C(2;8;-1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$. **C.** $\frac{x}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-3}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-1}$.

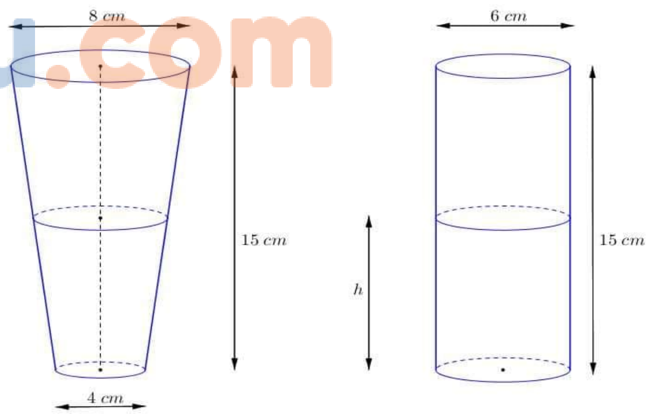
Lời giải

Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G(4;2;-2)$.

Đường thẳng d đi qua O và G có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OG}=(2;1;-1)$.

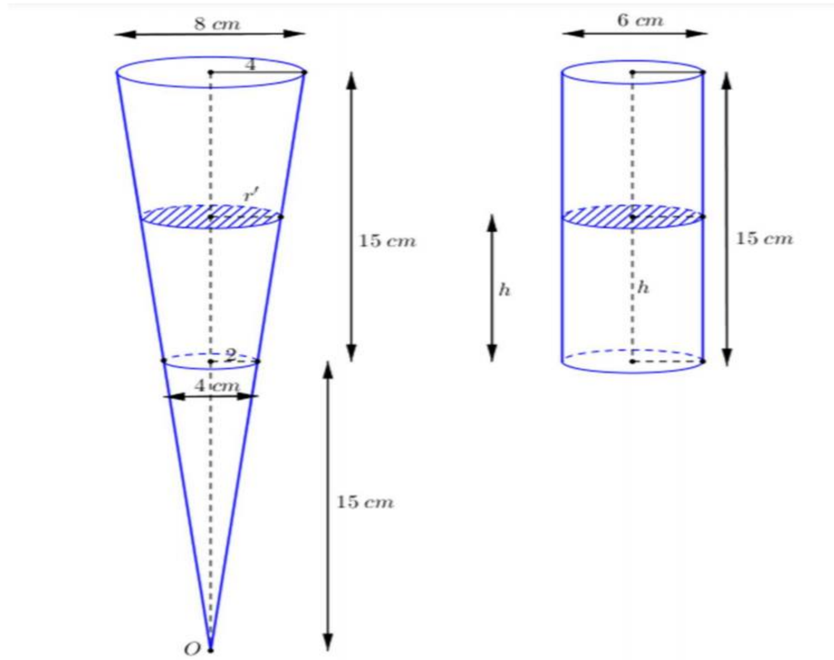
Vậy đường thẳng d có phương trình chính tắc là $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$.

Câu 42. Lon nước ngọt có hình trụ còn cốc nước thì có hình nón cụt (như hình vẽ dưới đây). Khi rót nước ngọt từ lon ra cốc thì chiều cao h của phần nước ngọt còn lại trong lon và chiều cao của phần nước ngọt có trong cốc là như nhau. Hỏi khi đó chiều cao h của nước trong lon gần nhất là số nào sau đây?



A. $9{,}18\,\text{cm}$. **B.** $14{,}2\,\text{cm}$. **C.** $8{,}58\,\text{cm}$. **D.** $7{,}5\,\text{cm}$.

Lời giải



Thể tích lon nước ngọt lúc đầu là $V=\pi.3^2.15=135\pi$.

Gọi V_1 là thể tích nước ngọt còn lại trong lon sau khi rót ra cốc. Ta có $V_1=\pi.3^2.h=9\pi h$.

Gọi V_2 là thể tích nước ngọt đã rót ra. Ta có $V_2=\dfrac{\pi h}{3}\left(r^2+r'^2+rr'\right)$ trong đó $r=2$, r' là bán kính mặt trên của phần nước ngọt trong cốc.

Ta có $\dfrac{r}{r'}=\dfrac{15}{15+h}\Rightarrow r'=\dfrac{2h+30}{15}$ (do $r=2$).

Vì $V=V_1+V_2$ nên ta có phương trình $\dfrac{\pi h}{3}\left(4+\left(\dfrac{2h+30}{15}\right)^2+2.\dfrac{2h+30}{15}\right)+9\pi h=135\pi$

$\Leftrightarrow 4h^3+180h^2+8775h-91125=0 \Leftrightarrow h\approx 8{,}58$.

Câu 43. Cho số thực dương x bất kì và số thực dương $y\neq 1$ thỏa mãn: $x^{\ln y-1}.y^{\sqrt{4-\ln^2 x}}=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\log_y x$. Giá trị của $M.m$ bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** $-4\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Với $x>0, y>0, y\neq 1$.

$x^{\ln y-1}.y^{\sqrt{4-\ln^2 x}}=1\Leftrightarrow \log_y x^{\ln y-1}+\sqrt{4-\ln^2 x}=0\Leftrightarrow(\ln y-1).\log_y x+\sqrt{4-\ln^2 x}=0$.

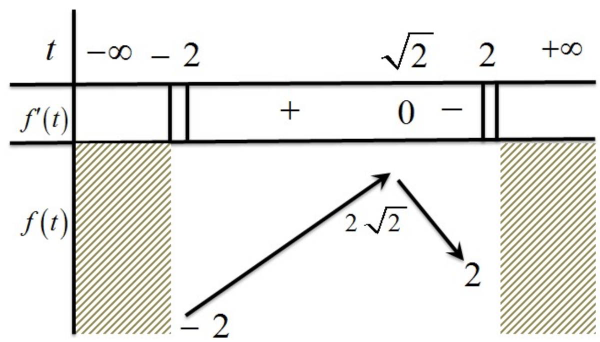
$\ln x-\log_y x+\sqrt{4-\ln^2 x}=0\Leftrightarrow \log_y x=\ln x+\sqrt{4-\ln^2 x}$.

Xét $f(x)=\ln x+\sqrt{4-\ln^2 x}$, $x>0$, $-2\leq \ln x\leq 2$.

Đặt $t=\ln x$, $-2\leq t\leq 2$ xét $f(t)=t+\sqrt{4-t^2}$, $f'(t)=1-\dfrac{t}{\sqrt{4-t^2}}$.

$$f'(t)=0\Leftrightarrow 1-\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}=0\Rightarrow\sqrt{4-t^2}=t\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq 0\\ t=\sqrt{2}\,(TM)\\ t=-\sqrt{2}\,(L)\end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta có

Hàm $f(t)$ đạt giá trị lớn nhất $M=2\sqrt{2}$ tại $t=\sqrt{2}$, hay $\log_y x$ đạt giá trị lớn nhất $M=2\sqrt{2}$ tại $\ln x=\sqrt{2}\Leftrightarrow x=e^{\sqrt{2}}\,(TM)$.

Hàm $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất $m=-2$ tại $t=-\sqrt{2}$, hay $\log_y x$ đạt giá trị nhỏ nhất $m=-2$ tại $\ln x=-2\Leftrightarrow x=e^{-2}\,(TM)$.

Vậy $M.m=2\sqrt{2}.(-2)=-4\sqrt{2}$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=1-t\\ z=1-t\end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-3=0$.

Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α), cắt và vuông góc với đường thẳng d là:

A. $\begin{cases}x=1\\ y=1-2t\\ z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1\\ y=1-t\\ z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1\\ y=1-t\\ z=1+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1\\ y=1-t\\ z=1+t\end{cases}$

Lời giải

+) Ta có $\begin{cases}\Delta\subset(\alpha)\\ \Delta\perp d\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_\Delta}=[\overrightarrow{n_{(\alpha)}},\overrightarrow{u_d}]=(0;2;-2)=-2(0;-1;1)$.

+) Gọi $I=d\cap\Delta$.

+) $I \in d \Rightarrow I(1+t;1-t;1-t)$.

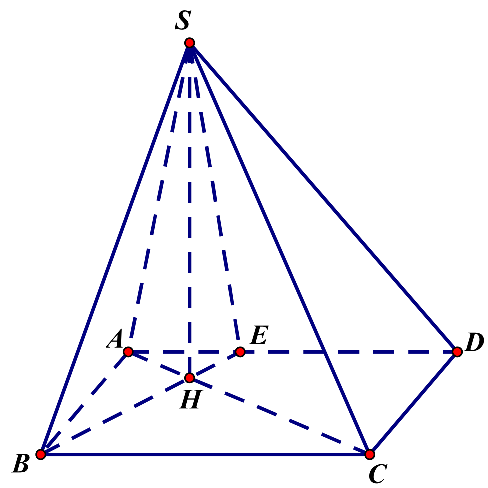
+) Vì $I \in \Delta, \Delta \subset (\alpha)$ nên $I \in (\alpha) \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow I(1;1;1)$.

+) Do đó phương trình của đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, E là điểm trên cạnh AD sao cho BE vuông góc với AC tại H và $AB > AE$, cạnh SH vuông góc với mặt phẳng đáy, góc $\widehat{BSH} = 45^0$. Biết $AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$, $BE = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{32a^3\sqrt{5}}{15}$. **B.** $\dfrac{16a^3}{3\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{32a^3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{8a^3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



Tam giác ABE vuông tại A và có đường cao AH nên ta có:

$$\begin{cases} AB.AE = AH.BE \\ AE^2 + AB^2 = BE^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB.AE = 2a^2 \\ AB^2 + AE^2 = 5a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB.AE = 2a^2 \\ (AB+AE)^2 - 2AB.AE = 5a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB.AE = 2a^2 \\ AB + AE = 3a \end{cases}.$$

Suy ra độ dài các đoạn AB, AE là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 3aX + 2a^2 = 0$.

Vì $AB > AE$ nên $\begin{cases} AB = 2a \\ AE = a \end{cases}$.

Tam giác AHB vuông tại H nên $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác SHB vuông tại H nên $SH = BH.\cot\widehat{BSH} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác ABC vuông tại B và có đường cao BH nên $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{BA^2} + \dfrac{1}{BC^2} \Rightarrow BC = 4a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4a}{\sqrt{5}}.2a.4a = \dfrac{32a^3}{3\sqrt{5}} = \dfrac{32a^3\sqrt{5}}{15}$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $e^{e^{2x}-a} - 2x - a = 0$ có nhiều nghiệm nhất là

A. $a \geq 0$.   **B.** $a > 1$.   **C.** $a < e$.   **D.** $a \geq -1$.

Lời giải

Đặt $e^{2x} - a = 2t$.

Phương trình đã cho trở thành $e^{2t} = 2x + a$ (1).

Xét hệ phương trình $\begin{cases} e^{2x} = 2t + a \\ e^{2t} = 2x + a \end{cases} \Rightarrow e^{2x} - e^{2t} = 2t - 2x \Leftrightarrow e^{2x} + 2x = e^{2t} + 2t \ (2)$.

Dễ thấy hàm số $f(x) = e^{x} + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình $(2) \Leftrightarrow f(2x) = f(2t) \Leftrightarrow 2x = 2t \Leftrightarrow x = t$.

Thay $x = t$ vào phương trình (1) được $e^{2x} - 2x = a \ (3)$.

Xét hàm số $y = g(x) = e^{2x} - 2x$. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 2e^{2x} - 2$.

$y' = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$:

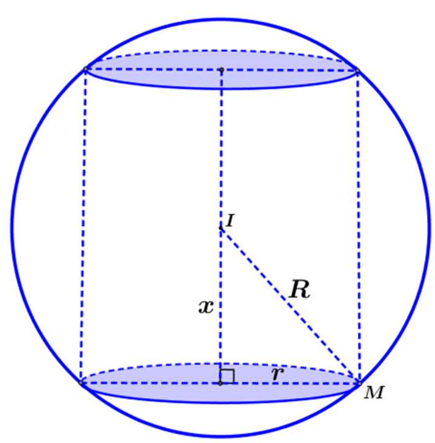
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình (1) có nhiều nghiệm nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nhiều nghiệm nhất $\Leftrightarrow a > 1$

Câu 47. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;0)$, $B(-1;2;4)$. Xét hình trụ (T) nội tiếp mặt cầu đường kính AB và có trục nằm trên đường thẳng AB. Khi thể tích của khối trụ (T) đạt giá trị lớn nhất thì mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (T) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $C(0;-1;-2\sqrt{3})$.   **B.** $C(0;-1;2\sqrt{3})$.   **C.** $C(1;0;-2\sqrt{3})$.   **D.** $C(-1;0;2\sqrt{3})$.

Lời giải



Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(1;0;2)$, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=2\sqrt{3}$.

Giả sử hình trụ (T) nội tiếp mặt cầu đường kính AB có chiều cao $h=2x$, bán kính đáy r.

Ta có $r^2=R^2-x^2=12-x^2$.

Khi đó thể tích khối trụ (T) là $V=\pi r^2 h=2\pi\left(12-x^2\right)x=-2\pi x^3+24\pi x$ với $0<x<2\sqrt{3}$.

+) $V'=-6\pi x^2+24\pi$; $V'=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Bảng biến thiên

x	0		2		$2\sqrt{3}$
V'		$+$	0	$-$	
V			32π		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Suy ra thể tích khối trụ lớn nhất khi $x=2$.

Khi đó, mặt phẳng (P) chứa đường tròn đáy của hình trụ (T) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(-4;4;4)$ nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $-x+y+z+d=0$.

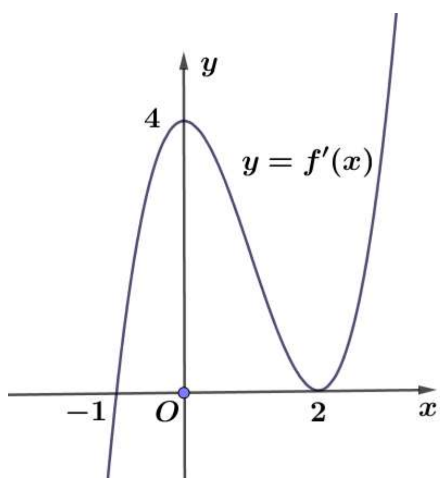
Ta có $d\left(I,(P)\right)=\dfrac{|d+1|}{\sqrt{3}}=2\Leftrightarrow d=-1\pm 2\sqrt{3}$.

Phương trình mặt phẳng chứa hai đường tròn đáy của hình trụ (T) là:

$(P_1):-x+y+z-1+2\sqrt{3}=0$, $(P_2):-x+y+z-1-2\sqrt{3}=0$.

Kiểm tra ta được điểm $C\left(-1;0;2\sqrt{3}\right)$ thuộc mặt phẳng (P_2).

Câu 48. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{4}x^4+ax^3+bx^2+cx$ có đồ thị (C) của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ sau:



Đặt $g(x)=f\left(f'(x)\right)$, $h(x)=f'\left(f(x)\right)$. Tổng số điểm cực trị của hàm số $g(x),h(x)$ là:

A. 12. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Ta có : $f'(x)=x^3+3ax^2+2bx+c$ có đồ thị (C).

Dựa vào đồ thị ta có : $f'(x)=(x-2)^2.(x+1)=x^3-3x^2+4$.

Đồng nhất hệ số ta được $a=-1;b=0;c=4$.

Suy ra $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x$; $f''(x)=3x^2-6x$.

+ Xét hàm số $y=g(x)=f(f'(x))$.

Ta có $g'(x)=f''(x).f'(f'(x))$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ f'(f'(x))=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f'(x)=2 \\ f'(x)=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x^3-3x^2+4=2 \quad (1) \\ x^3-3x^2+4=-1 \quad (2) \end{array}\right. (*).$$

Do phương trình (1) có 3 nghiệm, phương trình (2) có 1 nghiệm nên hệ phương trình (*) có 6 nghiệm, trong đó có 3 nghiệm bội chẵn của phương trình (1). Do đó hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

+ Xét hàm số $h(x)=f'(f(x))$

Ta có $h'(x)=f'(x).f''(f(x))$.

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f''(f(x))=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \\ \frac{1}{4}x^4-x^3+4x=0 \quad (3) \\ \frac{1}{4}x^4-x^3+4x=2 \quad (4) \end{array}\right. \quad (**)$$

Do phương trình (3) có 2 nghiệm đơn, phương trình (4) có 2 nghiệm đơn nên hệ phương trình (**) có 6 nghiệm, trong đó có 1 nghiệm bội chẵn $x=2$. Do đó hàm số $h(x)$ có 5 điểm cực trị .

Vậy tổng số điểm cực trị của hai hàm $g(x), h(x)$ là 8.

Câu 49. Hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) đi qua điểm $A(1;0)$; hàm số bậc hai $y=g(x)$ có đồ thị (C_2) đi qua điểm $B(1;-4)$. $(C_1),(C_2)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1;2;3$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1),(C_2)$

A. $\frac{115}{3}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{71}{6}$. **D.** $\frac{112}{3}$.

Lời giải

Ta có: (C_1) đi qua điểm $A(1;0)$ nên $f(1)=0$.

(C_2) đi qua điểm $B(1;-4)$ nên $g(1)=-4$.

Vì $(C_1),(C_2)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-1;2;3$ nên ta có:

$f(x)-g(x)=a(x+1)(x-2)(x-3)$ (*), $a\neq 0$

Thay $x=1$ vào hai vế (*) ta được: $f(1)-g(1)=4a \Leftrightarrow 4=4a \Leftrightarrow a=1$ (thỏa mãn).

Suy ra $f(x)-g(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$.

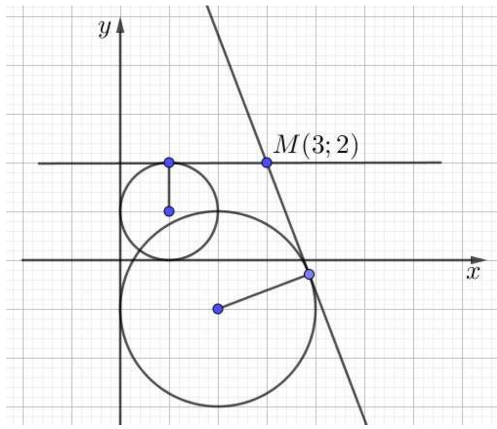
Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(C_1),(C_2)$ là:

$$S=\left|\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)(x-3)\,dx\right|+\left|\int_{2}^{3}(x+1)(x-2)(x-3)\,dx\right|=\frac{71}{6}.$$

Câu 50. Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-1-i|=1$, $|z_2-2+i|=2$. Số phức z thỏa mãn $\left(\overline{z}-\overline{z_1}\right)(1+i-z_1)$ và $\left(\overline{z}-\overline{z_2}\right)(2-i-z_2)$ là các số thuần ảo. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z-3-2i|$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải



Giả sử $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$, $z=x+yi$ với $x_1,y_1,x_2,y_2,x,y\in\mathbb{R}$.

Gọi các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2,z lần lượt là $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M(x;y)$. Ta có

+) $|z_1-1-i|=1\Rightarrow M_1$ thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;1)$, bán kính $R_1=1$.

+) $|z_2-2+i|=2\Rightarrow M_2$ thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;-1)$, bán kính $R_2=2$.

+) $\left(\overline{z}-\overline{z_1}\right)(1+i-z_1)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow (x-x_1)(1-x_1)+(y-y_1)(1-y_1)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M}\perp\overrightarrow{M_1I_1}$ $\Leftrightarrow$ MM_1 là tiếp tuyến của đường tròn (C_1).

+) $\left(\overline{z}-\overline{z_2}\right)(2-i-z_2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow (x-x_2)(2-x_2)+(y-y_2)(-1-y_2)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_2M}\perp\overrightarrow{M_2I_2}$ $\Leftrightarrow$ MM_2 là tiếp tuyến của đường tròn (C_2).

Ta thấy, điểm $A(3;2)$ nằm ngoài hai đường tròn (C_1), (C_2) nên từ A kẻ được tiếp tuyến tới hai đường tròn trên.

Do đó $|z-3-2i|=MA$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $M\equiv A$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z-3-2i|$ bằng 0.

HẾT