BÀI 6: CUNG CHỨA GÓC

Bài 33 trang 105 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Cho tam giác ABC có cạnh BC cố định và góc A = α không đổi.Tìm quỹ tích giao điểm của ba đường phân giác trong cuả tam giác

Lời giải:

*Chứng minh thuận:

Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác ABC

Ta có: $\widehat{IBC} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$; $\widehat{ICB} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

Suy ra: $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{\widehat{ABC}+\widehat{ACB}}{2}$

Trong $\triangle ABC$ ta có:

$\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180° - \widehat{BAC} = 180° - \alpha$

Suy ra: $\widehat{IBC} + \widehat{ICB} = \frac{180° - \alpha}{2}$

Trong $\triangle BIC$,ta có: $\widehat{BIC} = 180° - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB})$

Suy ra: $\widehat{BIC} = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} = \frac{360° - 180° + \alpha}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}$

Vì α không đổi nên $\widehat{BIC} = 90° + \frac{\alpha}{2}$ không đổi

Do I thay đổi tạo với hai đầu đoạn BC

cố định một góc bằng $90° + \frac{\alpha}{2}$ không đổi nên

I nằm trên cung chứa $90° + \frac{\alpha}{2}$ vẽ trên BC

*Chứng minh đảo:

Trên cung chứa $90° + \frac{\alpha}{2}$ lấy điểm I' bất kì.

Vẽ trên cùng nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm I'

hai tia Bx,Cy sao cho BI' là phân giác của $\widehat{CBx}$,

CI' là phân giác của $\widehat{BCy}$; Bx cắt Cy tại A'

Trong $\triangle$BI'C ta có: $\widehat{BI'C} = 90° + \frac{\alpha}{2}$

Suy ra: $\widehat{I'BC} + \widehat{I'CB} = 180°$ - $(90° + \frac{\alpha}{2}) = \frac{180° - \alpha}{2}$

Mà $\widehat{CBA'} = 2.\widehat{I'BC}$; $\widehat{BCA'} = 2.\widehat{I'CB}$

Suy ra: $\widehat{CBA'} + \widehat{BCA'} = 2.\frac{180° - \alpha}{2} = 180° - \alpha$

Trong $\triangle$A'BC ,ta có:

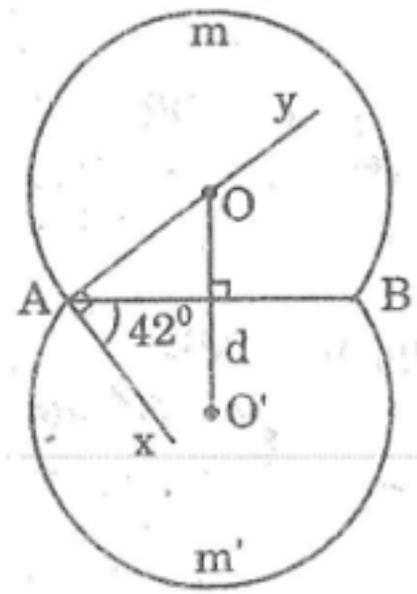
$$\widehat{BA'C} = 180° - (\widehat{CBA'} + \widehat{BCA'}) = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$$

Vậy quỹ tích giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC khi $\widehat{A} = \alpha$ không đổi và BC cố định là cung chứa góc $90° + \frac{\alpha}{2}$ vẽ trên BC

Bài 34 trang 105 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Dựng cung chứa góc 42° trên đoạn thẳng AB = 3cm

Lời giải:



- Dựng đoạn thẳng AB = 3cm

- Vẽ tia Ax sao cho góc (BAx) = 42°

- Dựng đường thẳng d là trung trực của đoạn AB

- Dựng tia Ay sao cho Ay ⊥ Ax (tia Ay cắt đường trung trực d của AB tại O)

- Dựng cung tròn AmB tâm O bán kính OA

- Dựng điểm O’ đối xứng với O qua AB

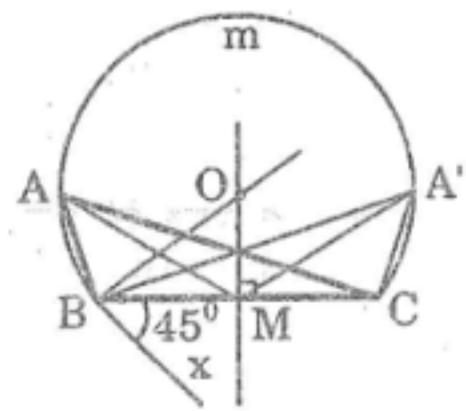
- Dựng cung tròn (Am'B) tâm O’ bán kính O’A

Ta được hai cung chứa góc 42° trên đoạn thẳng AB = 3cm đối xứng nhau qua AB.

Bài 35 trang 106 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Dựng tam giác ABC biết BC = 3cm,góc A = 45° và trung tuyến AM = 2,5cm

Lời giải:



- Dựng đoạn thẳng AB = 3cm

- vẽ tia Bx sao cho góc (CBx) = 45°

- Dựng trung điểm M của BC

- Dựng đường trung trực của BC (qua M)

- Dựng tia vuông góc với Bx tại B ,cắt đường trung trực của BC tại O

- Dựng cung tròn BmC bán kính OB là cung chứa góc 45° vẽ trên đoạn BC

- Dựng đường tròn tâm M bán kính 2,5cm cắt cung BmC lần lượt tại A và A’

- Nối AB , AC (hoặc A’B , A’C) ta có: ΔABC (ΔA’BC) có BC = 3cm , góc A = 45°(hoặc góc (A') =45°) và trung tuyến AM =2,5cm.

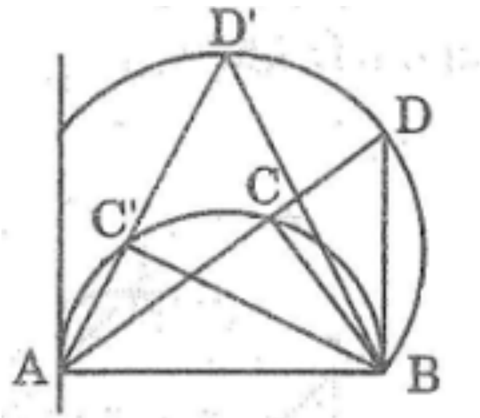
Bài 36 trang 106 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Cho nửa đường tròn đường kính AB cố định. C là một điểm trên nửa đường tròn trên dây AC kéo dài lấy điểm D sao cho CD=CB

a. Tìm quỹ tích các điểm D khi C chạy trên nửa đường tròn đã cho

b. Trên tia CA lấy điểm E sao cho CE = CB.Tìm quỹ tích các điểm E khi C chạy trên nửa đường tròn đã cho

Lời giải:



Hình a

a. hình a:

*Chứng minh thuận:

Ta có: $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra: $\widehat{BCD} = 90°$ (1)

Lại có: CB = CD (gt) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\triangle BCD$ vuông cân tại C

Suy ra: $\widehat{CDB} = 45°$ hay $\widehat{ADB} = 45°$

Khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB cố định thì C chuyển động trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn thẳng AB.Khi đó dây AC thay đổi phụ thuộc vào vị trí điểm C trên nửa đường tròn đường kính AB

- dây AC lớn nhất bằng đường kính của đường tròn .Khi C trùng với B thì D cũng trùng với B.vậy B là điểm của quỹ tích

- Dây AC nhỏ nhất có độ dài bằng 0 khi C trùng với A.Khi đó D trùng với B' là giao điểm của tiếp tuyến đường tròn đường kính AB tại A với cung chứa góc 45° vẽ trên AB

*Chứng minh đảo:

Lấy điểm D' bất kì trên cung BB' ,nối AD' cắt đường tròn đường kính AB tại C'.Nối BC' ,B'D'

Ta có: $\widehat{AD'B} = 45°$ (vì D' nằm trên cùng chứa góc 45° vẽ trên AB)

Trong đường tròn đường kính AB ta có:

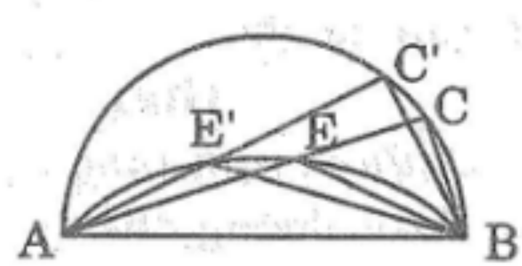
$\widehat{AC'B} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra : $\widehat{BC'D'} = 90°$

Suy ra : △BC'D' vuông cân tại C' => C'B = C'D'

Quỹ tích điểm các điểm D khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB là cung BB' nằm trên cung chứa góc 45° vẽ trên đoạn AB, trong nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C (bị giới hạn bởi tiếp tuyến Ax).

b)



Hình b

b. Hình b:

*chứng minh thuận

Trong đường tròn đường kính AB ta có:

$\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Lại có: CB = CE (gt)

Suy ra: △CBE vuông cân tại C => $\widehat{CEB} = 45°$

Mà $\widehat{CEB} + \widehat{AEB} = 180°$ (hai góc kề bù)

Suy ra: $\widehat{AEB} = 180° - \widehat{CEB} = 180° - 45° = 135°$

Khi C chuyển động trên đường tròn đường kính AB cố định thì D chuyển động trên cung chứa góc 135° dựng trên đoạn thẳng AB cố định

-Khi dây AC có độ dài lớn nhất bằng đường kính đường tròn thì C trùng với B nên E cũng trùng với B.Vậy B là điểm thuộc quỹ tích

- Khi dây AC có độ dài nhỏ nhất bằng 0 thì C trùng với A.khi đó E trùng với A nên A là một điểm của quỹ tích

Vậy E chuyển động trên cung chứa góc 135° vẽ trên đoạn AB nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C

*chứng minh đảo:

Lấy điểm E' bất kì trên cung chứa góc 135° , nối AE' cắt đường tròn đường kính AB tại C'.Nối BE', BC'

Ta có: $\widehat{AE'B} = 135°$ (vì E' nằm trên cung chứa góc 135° vẽ trên AB)

$\widehat{AE'B} + \widehat{BE'C'} = 180^0$ (hai góc kề bù)

Suy ra, $\widehat{BE'C'} = 180^0 - \widehat{AE'B} = 180^0 - 135^0 = 45^0$

Trong đường tròn đường kính AB ta có:

$\widehat{AC'B} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

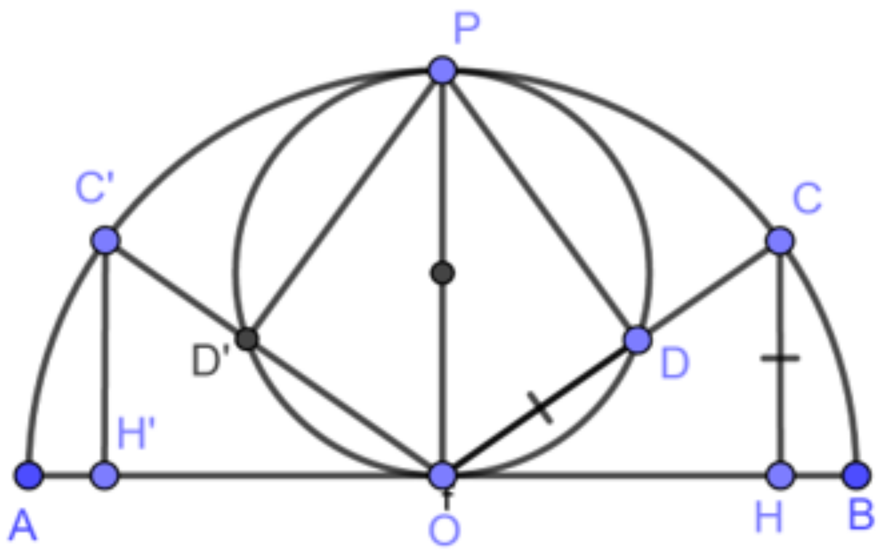
Suy ra : $\triangle$E'C'B vuông cân tại C' => C'B = C'E'

Quỹ tích điểm các điểm E khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB là cung chứa góc 135° vẽ trên đoạn AB, trong nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C.

Bài 37 trang 106 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Cho nửa đường tròn đường kính AB và C là một điểm trên nửa đường tròn .Trên bán kính OC lấy điểm D sao cho OD bằng khoảng cách CH từ C đến AB. Tìm quỹ tích các điểm D khi C chạy trên nửa đường tròn đã cho

Lời giải:



*Chứng minh thuận:

Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với AB cắt nửa đường tròn đường kính AB tại P.

Vì O cố dịnh, đường tròn đường kính AB cố định nên P cố định.Nối PD

Ta có: OP // CH (cùng ⊥ AB)

Xét hai tam giác HCO và DOP ta có:

OD = CH (gt)

$\widehat{POD} = \widehat{OCH}$ (so le trong)

OP = OC (=R)

Vậy $\triangle HCO = \triangle DOP$ (c.g.c) => $\widehat{ODP} = \widehat{CHO}$

Mà $\widehat{CHO} = 90^\circ$ nên $\widehat{ODP} = 90^\circ$

Khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB thì D thay đổi tạo với hai đầu đọan thẳng OP cố định một góc ODP = 90^o

Vậy D chuyển động trên đường tròn đường kính OP

*Chứng minh đảo

Lấy điểm D' bất kì trên đường tròn đường kính OP ,nối OD' cắt nửa đường tròn đường kính AB tại C'.Nối PD' và C'H' ⊥ AB

Xét hai tam giác C’H’O và PD’O ta có:

$$\widehat{C'H'O} = \widehat{PD'O} = 90^0$$

$$\widehat{D'OP} = \widehat{OC'H'}\ (slt)$$

$$OC' = OP = R$$

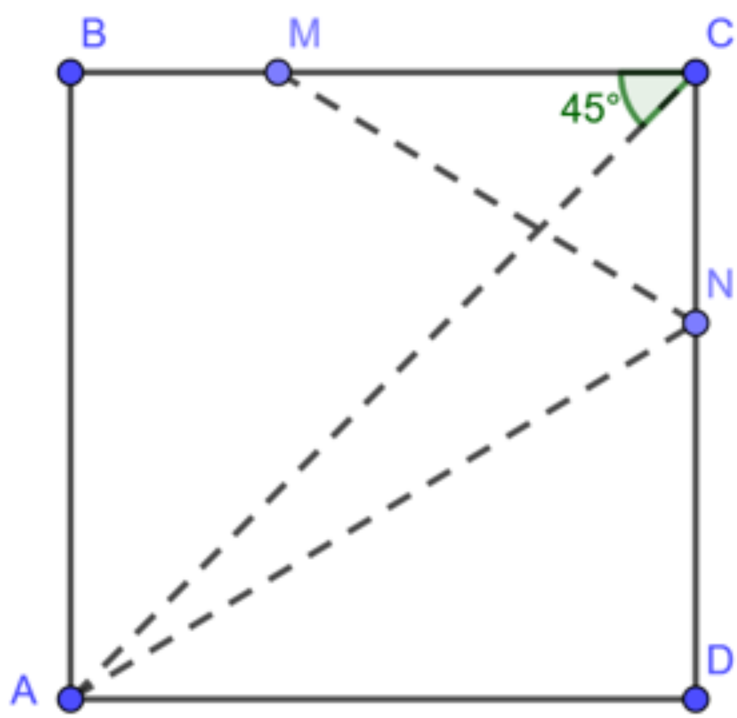
Vậy ΔC’H’O = ΔPD’O (c.g.c) ⇒ C’H’ = OD’

Quỹ tích điểm các điểm D khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB là đường tròn đường kính OP, với OP = AB/2

Bài 38 trang 106 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Dựng hình vuông ABCD ,biết đỉnh A , điểm M thuộc cạnh BC và điểm N thuộc cạnh CD

Lời giải:



Phân tích: Vì ABCD là hình vuông nên:

$$\widehat{BCD} = 90^0 \text{ hay } \widehat{MCN} = 90^0,\ \widehat{BCA} = 45^0 \text{ hay } \widehat{MCA} = 45^0$$

Ta có, ba điểm A, M, N cố định nên bài toán quy về việc dựng đỉnh C. Đỉnh C là giao điểm của :

- Cung chứa góc 90° dựng trên đoạn thẳng MN

- Cung chứa góc 45° dựng trên đoạn thẳng AM

Cách dựng:

- Dựng cung chứa góc 90° trên đoạn MN

- Dựng cung chứa góc 45° trên đoạn AM

Hai cung cắt nhau tại C

- Nối CM ,CN

- kẻ AB ⊥ CM tại B , AD ⊥ CN tại D

Tứ giác ABCD là hình vuông cần dựng.

Bài tập bổ sung (trang 106)

Bài 1 trang 106 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Dựng một cung chứa góc 60^0 trên đoạn thẳng AB cho trước.

Lời giải:

Cách dựng: − Dựng đoạn thẳng AB.

− Dựng tia Ax sao cho góc BAx = 60^o.

− Dựng đường thẳng d là trung trực của AB.

− Dựng tia Ay ⊥ Ax tại A.

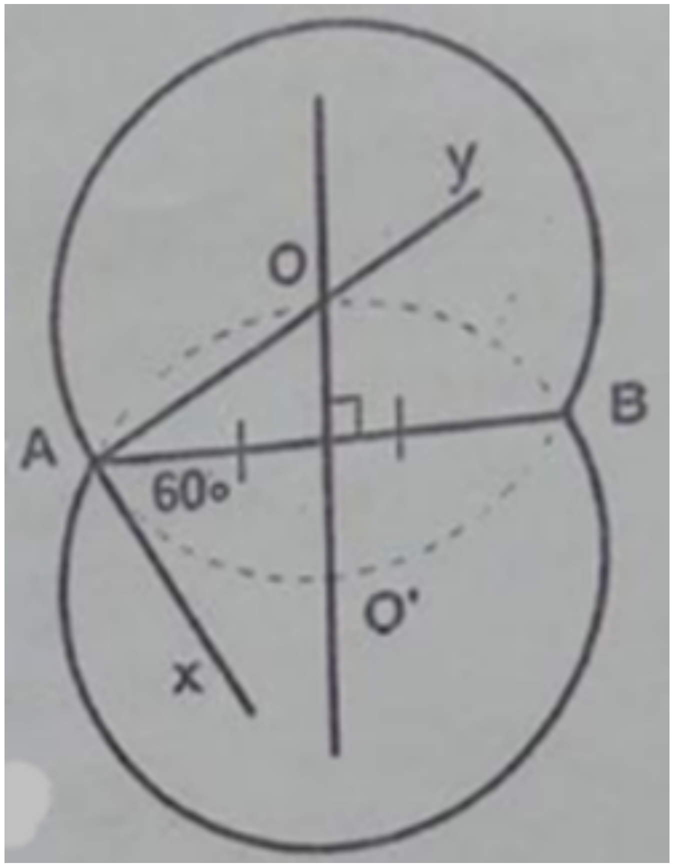
− Tia Ay cắt đường thẳng d tại O.

− Dựng cung tròn tâm O bán kính OA.

− Dựng O' đối xứng với O qua AB.

− Dựng cung tròn tâm O’ bán kính O’A.

Ta có cung chứa góc 60° vẽ trên đoạn AB cho trước.

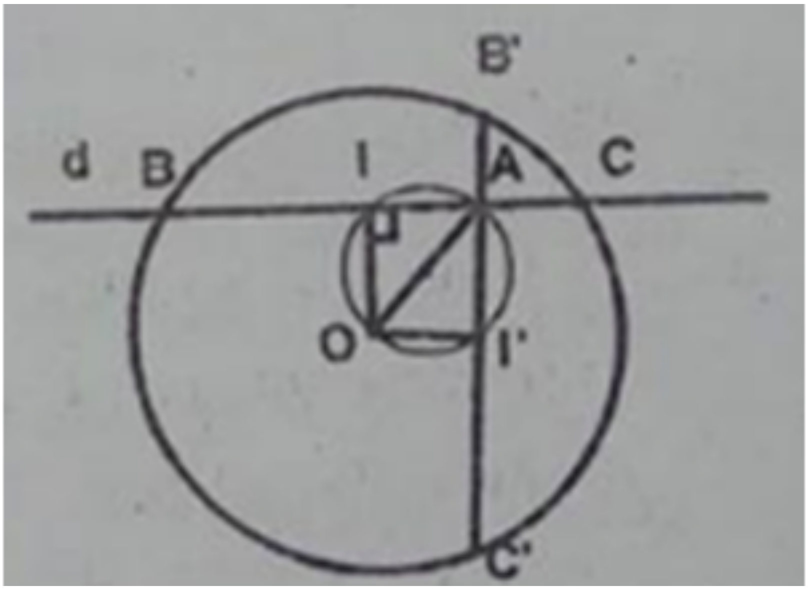


Bài 2 trang 106 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm A (khác O) ở trong đường tròn đó.

Một đường thẳng d thay đổi, luôn đi qua A, cắt đường tròn đã cho tại hai điểm là B và C. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng BC.

Lời giải:



Chứng minh thuận:

Đường tròn (O) cho trước, điểm A cố định nên OA có độ dài không đổi.

ΔOBC cân tại O (vì OB = OC bán kính)

IB = IC (gt) nên OI là đường trung tuyến vừa là đường cao

OI ⊥ BC

Góc OIA = 90^o

Đường thẳng d thay đổi nên B, C thay đổi thì I thay đổi tạo với 2 đầu đoạn OA cố định góc góc OIA = 90^o. Vậy I chuyển động trên đường tròn đường kính OA.

Chứng minh đảo: Lấy điểm I' bất kỳ trên đường tròn đường kính AO. Đường thẳng AI' cắt đường tròn (O) tại 2 điểm B' và C'.

Ta chứng minh: I'B = I'C'.

Trong đường tròn đường kính AO ta có góc OI'A = 90^o (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

OI'⊥ B'C'

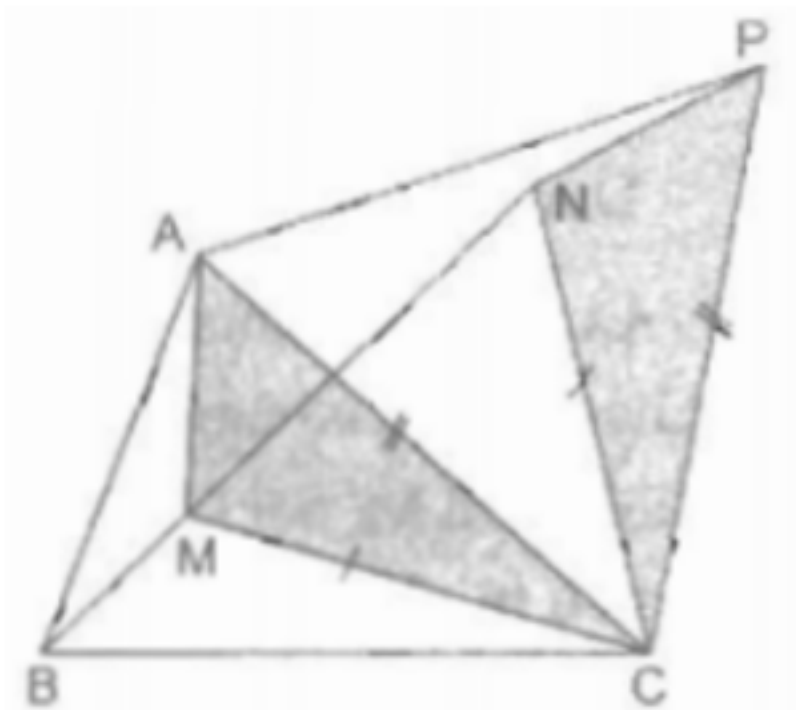
I'B' = I'C' (đường kính vuông góc với dây cung)

Vậy quỹ tích các điểm I là trung điểm của dây BC của đường tròn tâm O khi BC quay xung quanh điểm A cố định là đường tròn đường kính AO.

Bài 3 trang 106 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Xác định vị trí của điểm M trong tam giác sao cho MA + MB + MC nhỏ nhất.

Lời giải:



Trong ΔABC ta lấy điểm M. Nối MA, MB, MC.

Ta cần làm xuất hiện tổng MA + MB + MC sau đó tìm điều kiện để tổng đó nhỏ nhất.

Lấy MC làm cạnh dựng trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A tam giác đều MCN. Suy ra: CM = MN.

Lấy AC làm cạnh dựng trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa điểm B tam giác đều APC. Khi đó, CA = CP

$$\widehat{MCA} + \widehat{ACN} = 60^\circ$$

$$\widehat{ACN} + \widehat{NCP} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{NCP}$$

Xét ΔAMC và ΔPNC:

CM = CN (vì ΔMCN đều)

CA = CP (vì ΔAPC đều)

góc MCA = góc NCP (cmt)

Suy ra: ΔAMC = ΔPNC (c.g.c)

⇒ PN = AM

MA + MB + MC = NP + MB + MN

Ta có ΔABC cho trước nên điểm P cố định nên BM + MN + NP ngắn nhất khi 4 điểm B, M, N, P thẳng hàng.

Vì $\widehat{CMN} = 60^\circ$ nên 3 điểm B, M, N thẳng hàng khi và chỉ khi $\widehat{BMC} = 120^\circ$

Vì $\widehat{CNM} = 60^\circ$ nên 3 điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\widehat{CNP} = 120^\circ$

Mà ΔAMC = ΔPNC (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{PNC} = 120^\circ$

Vậy MA + MB + MC bé nhất khi và chỉ khi $\widehat{BMC} = 120^\circ$ và $\widehat{AMC} = 120^\circ$

Vậy M là giao điểm của 2 cung chứa góc 120º dựng trên BC và AC.