BÀI 5: CÔNG THỨC NGHIỆM THU GỌN

Bài 27 trang 55 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Xác định a, b',c trong mỗi phương trình rồi giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn:

a. $5x^2 – 6x -1 = 0$

b. $-3x^2 + 14x - 8 = 0$

c. $-7x^2 + 4x = 3$

d. $9x^2 + 6x + 1 = 0$

Lời giải:

a. Phương trình $5x^2 – 6x -1 = 0$ có hệ số a = 5, b' = -3, c = -1

Ta có: $\Delta' = b'^2 – ac = (-3)^2 -5.(-1) = 9 + 5 = 14 > 0$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{14}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-3)+\sqrt{14}}{5} = \frac{3+\sqrt{14}}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-3)-\sqrt{14}}{5} = \frac{3-\sqrt{14}}{5}$$

b. Phương trình $-3x^2+ 14x - 8 = 0$ có hệ số a = -3, b'= 7, c = -8

Ta có: $\Delta' = b'^2 – ac = 7^2 – (-3).(-8) = 49 – 24 = 25 > 0$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{25} = 5$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-7+5}{-3} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-7-5}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

c. Phương trình $-7x^2 +4x=3 \Leftrightarrow 7x^2 -4x+3 = 0$ có hệ số a=7, b'=-2 , c=3

Ta có: $\Delta' = b'^2 - ac = (-2)^2 -7.3 = 4- 21= -17 < 0$

Vậy phương trình vô nghiệm

d. Phương trình $9x^2 +6x+1 =0$ có hệ số a=9,b'=3,c=1

Ta có: $\Delta' = b'^2 - ac = 3^2 -9.1 = 9 - 9 = 0$

Phương trình có nghiệm kép:

$x_1 = x_2 = -b'/a =-3/9 =-1/3$

Bài 28 trang 55 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Với những giá trị nào của x thì giá trị của hai biểu thức sau bằng nhau?

a. $x^2 +2 + 2\sqrt{2}$ và $2(1+\sqrt{2})x$

b. $\sqrt{3}\, x^2 + 2x -1$ và $2\sqrt{3}\, x +3$

c. $-2\sqrt{2}\, x - 1$ và $\sqrt{2}\, x^2 + 2x +3$

d. $x^2 - 2\sqrt{3}\, x - \sqrt{3}$ và $2x^2 +2x +\sqrt{3}$

e. $\sqrt{3}\, x^2 + 2\sqrt{5}\, x - 3\sqrt{3}$ và $-x^2 - 2\sqrt{3}\, x +2\sqrt{5} +1$

Lời giải:

a. Ta có: $x^2 +2 + 2\sqrt{2} = 2(1 + \sqrt{2})x \Leftrightarrow x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 2 + 2\sqrt{2} = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = [-(1 + \sqrt{2})]^2 - 1(2 + 2\sqrt{2})$

$= 1 + 2\sqrt{2} +2 - 2 - 2\sqrt{2} = 1 > 0$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{1} = 1$

$$x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-[-(1+\sqrt{2})]+1}{1} = 1+\sqrt{2}+1 = 2+\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-[-(1+\sqrt{2})]-1}{1} = 1+\sqrt{2}-1 = \sqrt{2}$$

Vậy với x= 2 + √2 hoặc x = √2 thì giá trị của hai biểu thức trên bằng nhau

b. Ta có: $\sqrt{3}x^2 + 2x - 1 = 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 + 2x - 2\sqrt{3}x - 3 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 + (2 - 2\sqrt{3})x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 + 2(1 - \sqrt{3})x - 4 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = (1-\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}(-4) = 1 - 2\sqrt{3} + 3 + 4\sqrt{3}$

$= 1 + 2\sqrt{3} + 3 = (1+\sqrt{3})^2 > 0$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1+\sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(1-\sqrt{3})+1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

Vậy với x= 2 hoặc x = (-2√3)/3 thì giá trị của hai biểu thức trên bằng nhau

c. Ta có: $-2\sqrt{2}x - 1 = \sqrt{2}x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2 + 2x + 3 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}x^2 + 2(1 + \sqrt{2})x + 4 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = (1+\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}.4 = 1+2\sqrt{2} + 2 - 4\sqrt{2}$

$= 1 - 2\sqrt{2} + 2 = (\sqrt{2} - 1)^2 > 0$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{2} - 1$$

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(1+\sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -2$$

Vậy với x = -√2 hoặc x = -2 thì giá trị của hai biểu thức trên bằng nhau

d. Ta có: $x^2 - 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} = 2x^2 + 2x + \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} - 2x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = (1+\sqrt{3})^2 - 1.2\sqrt{3} = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{3} = 4 > 0$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{4} = 2$

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(1+\sqrt{3}) + 2}{1} = 1 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(1+\sqrt{3}) - 2}{1} = -3 - \sqrt{3}$$

Vậy với x =1 - √3 hoặc x = - 3 - √3 thì giá trị của hai biểu thức trên bằng nhau

e.Ta có: $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{5}x - 3\sqrt{3} = -x^2 - 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{5} + 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{5}x - 3\sqrt{3} + x^2 + 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{5} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}+1)x^2 + (2\sqrt{5} + 2\sqrt{3})x - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{3}+1)x^2 + 2(\sqrt{5}+\sqrt{3})x - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 1 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = (\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3}+\sqrt{1})(-3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 1)$

$= 5 + 2\sqrt{15} + 3 + 9 + 2\sqrt{15} + \sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 1$

$=18 + 4\sqrt{15} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$

$= 1 + 12 + 5 + 2.2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 2.2\sqrt{3}.\sqrt{5}$

$= 1 + (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 + 2.1.2\sqrt{3} + 2.1.\sqrt{5} + 2.2\sqrt{3}.\sqrt{5}$

$= (1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 > 0$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} = 1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5}$$

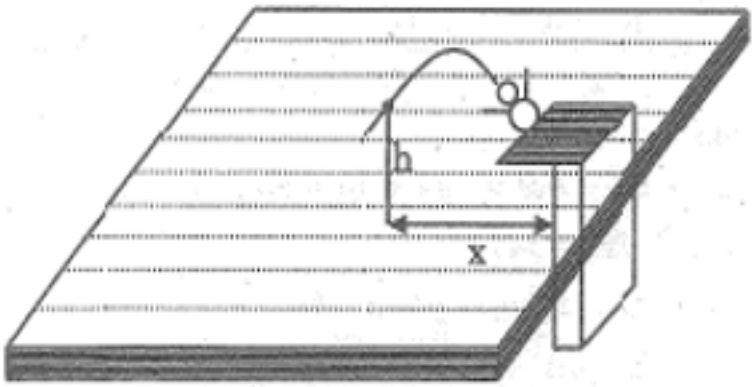
$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(\sqrt{5}+\sqrt{3}) + 1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3}+1} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(\sqrt{5}+\sqrt{3}) - 1 - 2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3}+1} = \frac{-1-3\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1}$$

Vậy với x=1 hoặc $x = \frac{-1-3\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1}$ thì giá trị của hai biểu thức trên bằng nhau

Bài 29 trang 55 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Một vận động viên bơi lội nhảy cầu (xem hình dưới). Khi nhảy độ cao h từ người đó đến mặt nước (tính bằng mét) phụ thuộc vào khoảng cách x từ điểm rơi đến chân cầu (tính bằng mét) bởi công thức : $h = -(x - 1)^2 + 4$. Hỏi khoảng cách x bằng bao nhiêu:



a. Khi vận động viên ở độ cao 3m?

b. Khi vận động viên chạm mặt nước?

Lời giải:

Khi vận động viên ở độ cao 3m nghĩa là h = 3m

Ta có: $3 = -(x-1)^2 + 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

Vậy x = 0m hoặc x = 2m

Khi vận động viên chạm mặt nước nghĩa là h = 0m

Ta có: $0 = -(x-1)^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = (-1)^2 - 1.(-3) = 1 + 3 = 4 > 0$

$$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{4} = 2$$

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-1)+2}{1} = 1+2 = 3$$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-1)-2}{1} = 1-2 = -1$$

Vì khoảng cách không thể mang giá trị âm nên x = 3m.

Bài 30 trang 56 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Tính gần đúng nghiệm của phương trình (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai):

a. $16x^2 – 8x + 1 = 0$

b. $6x^2 – 10x - 1 =0$

c. $5x^2 + 24x + 9 = 0$

d. $16x^2 – 10x + 1 = 0$

Lời giải:

a. $16x^2 – 8x + 1 = 0$

Ta có: $\Delta' = (-4)^2 – 16.1 = 16 -16 = 0$

Phương trình có nghiệm kép :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25$$

b. $6x^2 – 10x -1 =0$

Ta có: $\Delta' = (-5)^2 – 6.(-1) =25 + 6 =31 >0$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{31}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-5)+\sqrt{31}}{6} = \frac{5+\sqrt{31}}{6} \approx 1,76$$

$$x_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-5)-\sqrt{31}}{6} = \frac{5-\sqrt{31}}{6} \approx -0,09$$

c. $5x^2 + 24x + 9 = 0$

Ta có: $\Delta' = 12^2 - 5.9 = 144 - 45 = 99 > 0$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{(-12+3\sqrt{11})}{5} \approx -0,41$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{(-12-3\sqrt{11})}{5} \approx -4,39$$

d. $16x^2 - 10x + 1 = 0$

Ta có: $\Delta' = (-5)^2 - 16.1 = 25 - 16 = 9 > 0$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{9} = 3$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-5)+3}{16} = \frac{5+3}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-5)-3}{16} = \frac{5-3}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \approx 0,13$$

Bài 31 trang 56 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Với giá trị nào của x thì giá trị của hai hàm số bằng nhau?

a. $y = \frac{1}{3}x^2$ và $y = 2x - 3$

b. $y = \frac{-1}{2}x^2$ và $y = x - 8$

Lời giải:

a. Ta có: $\frac{1}{3}x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta' = (-3)^2 - 1.9 = 9 - 9 = 0$

Phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3$

Vậy với x=3 thì giá trị của hai hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$

và $y = 2x - 3$ bằng nhau

b. Ta có: $\frac{-1}{2}x^2 = x - 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 16 = 0$

$\Delta' = 1^2 - 1.(-16) = 1 + 16 = 17 > 0$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{17}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{1} = \sqrt{17} - 1$

$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-1 - \sqrt{17}}{1} = -1 - \sqrt{17}$

Vậy với $x = \sqrt{17} - 1$ hoặc $-1 - \sqrt{17}$ thì giá trị của hai hàm số $y = \frac{-1}{2}x^2$ và $y = x - 8$ bằng nhau

Bài 32 trang 56 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Với giá trị nào của m thì :

a. Phương trình $2x^2 - m^2x + 18m = 0$ có một nghiệm x = -3

b. Phương trình $mx^2 - x - 5m^2 = 0$ có một nghiệm x = -2

Lời giải:

a. Thay x=-3 vào phương trình $2x^2 – m^2x +18m = 0$ ta được:

$2(-3)^2 - m^2(-3) + 18m = 0 \Leftrightarrow 3m^2 +18m + 18 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 6m +6 = 0$ (có hệ số a = 1, b = 6 nên b' = 3; c = 6)

$\Delta' = 3^2 -1.6 = 9 - 6 = 3 > 0$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{3}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-3+\sqrt{3}}{1} = -3+\sqrt{3}$$

$$m_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-3-\sqrt{3}}{1} = -3-\sqrt{3}$$

Vậy với $m = -3 + \sqrt{3}$ hoặc $m = -3 - \sqrt{3}$ thì phương trình đã cho có nghiệm x = -3

b. Thay x = -2 vào phương trình $mx^2 – x – 5m^2 = 0$ ta được:

$m(-2)^2 – (-2) – 5m^2 = 0$

$\Leftrightarrow - 5m^2 + 4m + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 5m^2 – 4m - 2 = 0$ (Có a = 5; b = -4 nên b' = - 2; c = - 2)

$\Delta' = (-2)^2 -5.(-2) = 4 + 10 = 14 > 0$

$\sqrt{\Delta'} = \sqrt{14}$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-2)+\sqrt{14}}{5} = \frac{2+\sqrt{14}}{5}$$

$$m_2 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-(-2)-\sqrt{14}}{5} = \frac{2-\sqrt{14}}{5}$$

Vậy với m = $\frac{2-\sqrt{14}}{5}$ hoặc m = $\frac{2+\sqrt{14}}{5}$ thì phương trình đã cho có nghiệm x= - 2

Bài 33 trang 56 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Với giá trị nào của m thì các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

a. $x^2 – 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$

b. $(m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$

Lời giải:

a. $x^2 – 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$ (1)

Ta có: $\Delta' = [-(m+3)]^2 -1.(m^2 + 3) = m^2 + 6m + 9 – m^2 - 3$

$= 6m + 6$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 6m + 6 > 0 \Leftrightarrow 6m > -6 \Leftrightarrow m > -1$

Vậy m > -1 thì phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

b. $(m + 1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$ (2)

Ta có: $\Delta' = (2m)^2 – (m + 1)(4m - 1) = 4m^2 – 4m^2 + m – 4m +1$

= 1 – 3m

Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

*m + 1 ≠ 0 ⇔ m ≠ -1

và *Δ' > 0 ⇔ 1 - 3m > 0 ⇔ 3m < 1 ⇔ m < 1/3

Vậy m < 1/3 và m ≠ -1 thì phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 34 trang 56 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Với giá trị nào của m thì các phương trình sau có nghiệm kép

a. $5x^2 + 2mx – 2m + 15 = 0$

b. $mx^2 – 4(m -1)x - 8 = 0$

Lời giải:

a. $5x^2 + 2mx – 2m + 15 = 0$ (1)

Ta có: $\Delta' = m^2 – 5.(-2m + 15) = m^2 +10m - 75$

Phương trình (1) có nghiệm kép khi và chỉ khi:

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 + 10m – 75 = 0$

$\Delta'm = 5^2 -1.(-75) = 25 + 75 = 100 > 0$

$\sqrt{(\Delta'm)} = \sqrt{100} =10$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta_m'}}{a} = \frac{-5 + 10}{1} = 5$$

$$m_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta_m'}}{a} = \frac{-5 - 10}{1} = -15$$

Vậy m = 5 hoặc m = -15 thì phương trình đã cho có nghiệm kép

b. $mx^2 – 4(m -1)x - 8 = 0$ (2)

Phương trình (2) có nghiệm kép khi và chỉ khi: $m \neq 0$ và $\Delta'=0$

Ta có: $\Delta' = [-2(m - 1)]^2 – m(-8) = 4(m^2 -2m +1) + 8m$

$=4m^2 – 8m + 4 + 8m = 4m^2 + 4$

Vì $4m^2 + 4$ luôn luôn lớn hơn 0 nên Δ' không thể bằng 0 .Vậy không có giá trị nào của m để phương trình có nghiệm kép.

Bài tập bổ sung (trang 56)

Bài 1 trang 56 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có $\Delta' = 0$. Điều nào sau đây là đúng?

A) $x_1 = x_2 = \frac{b}{2a}$

B) $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$

C) $x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$

D) $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{2a}$

Lời giải:

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có $\Delta' = 0$

Do đó, phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -b'/a$

Chọn **B**

Bài 2 trang 56 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Tìm mối liên hệ giữa a, b, c để phương trình $(b^2 + c^2)x^2 - 2acx + a^2 - b^2 = 0$ có nghiệm.

Lời giải:

Hoặc $b \neq 0$ hoặc $c \neq 0$ phương trình có :

$$\Delta' = (-ac)^2 - (b^2 + c^2)(a^2 - b^2)$$
$$= a^2c^2 - a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 + b^2c^2$$
$$= -a^2b^2 + b^4 + c^2b^2 \quad)$$
$$= b^2(-a^2 + b^2 + c^2)$$
$$\Delta' \geq 0 \Rightarrow b^2(-a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$$

Vì $b^2 \geq 0 \Rightarrow -a^2 + b^2 + c^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq a^2$

Vậy với $a^2 \leq b^2 + c^2$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 3 trang 56 Sách bài tập Toán 9 Tập 2:

Chứng tỏ rằng phương trình (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0 luôn có nghiệm

Lời giải:

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-bx-ax+ab+x^2-cx-bx+bc+x^2-ax-cx+ac=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ac=0$$

$$\Delta'=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ac)$$

$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-3ab-3ac-3bc$$

$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$

$$=\frac{1}{2}\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(a^2-2ac+c^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right]$$

Ta có: $(a-b)^2\geq 0;(b-c)^2\geq 0;(a-c)^2\geq 0$

Suy ra: $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geq 0$

$\Rightarrow \Delta'=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right]\geq 0$

Vậy phương trình luôn luôn có nghiệm.