**Bài 1 ( 2,0 điểm)**

**Cách giải**

***Cho*** $P=\left(\dfrac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right):\dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\quad (a\ge 0,\, b\ge 0,\, a\ne b).$

***a) Rút gọn*** $P$.

$$P=\left(\frac{b-a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}\right):\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}\right):\frac{b-2\sqrt{ab}+a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$=\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}-\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a^2}+\sqrt{ab}+\sqrt{b^2}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}\right):\frac{b-\sqrt{ab}+a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$=\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}-\frac{a+\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right).\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-a-\sqrt{ab}-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

$$=\frac{a+2\sqrt{ab}+b-a-\sqrt{ab}-b}{a-\sqrt{ab}+b}$$

$$=\frac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}$$

Vậy $P=\dfrac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}$ với $a\ge 0,\, b\ge 0,\, a\ne b$.

***b) Chứng minh rằng*** $P\ge 0$.

Ta có: $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\ge 0\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}>\sqrt{ab}$

Do đó $a+b-\sqrt{ab}>0$. Mà $\sqrt{ab}\ge 0$

Suy ra $P=\dfrac{\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}+b}\ge 0$ với $a\ge 0, b\ge 0, a\ne b$ (đpcm).

**Bài 2 (3,0 điểm):**

**Cách giải:**

***a) Chứng minh rằng: với mọi giá trị của $m$, ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm: $x^2-(2m+1)x+m^2+3=0$ và $x^2-mx+4m-11=0$.***

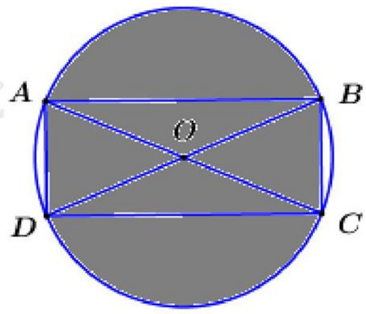
Đặt $x^2-(2m+1)x+m^2+3=0 \quad (1)$ và $x^2-mx+4m-11=0 \ (2)$

Giả sử cả 2 phương trình đều vô nghiệm $\Rightarrow \begin{cases}4m-11<0\\ m^2-4(4m-11)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m-11<0\\ m^2<4(4m-11)<0\ (Vo\ ly)\end{cases}$.

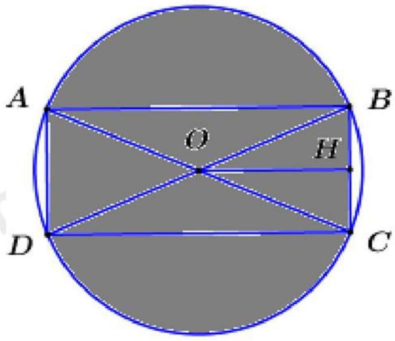
$\Rightarrow$ Giả sử sai.

Vậy trong 2 phương trình đã cho ít nhất có 1 phương trình có nghiệm (đpcm).

***b) Một tấm bìa quảng cáo có dạng hình tròn tâm $O$, bán kính bằng $1,6\ m$. Giả sử hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm $O$ bán kính bằng $1,6\ m$ sao cho $\angle BOC=45^0$ (hình bên). Người ta cần sơn màu toàn bộ tấm biển quảng cáo và chỉ sơn một mặt hình ở hình bên. Biết mức chi phí sơn phần hình tô đậm là 150 nghìn đồng $/m^2$ và phần còn lại là 200 nghìn đồng $/m^2$. Hỏi số tiền (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) để sơn toàn bộ biển quảng cáo bằng bao nhiêu? Cho $\pi=3,14$.***




Diện tích hình tròn là $S=\pi R^2=3,14.1,6^2=8,0384\left(cm^2\right)$.




Gọi $H$ là trung điểm của $BC$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $OA = OB = OC = OD \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại $O$ $\Rightarrow OH \perp BC$ (đường trung tuyến đồng thời là đường cao trong tam giác vuông).

Xét tam giác $OBC$ có: $\angle OBC = \angle OCB = \dfrac{180^0 - \angle BOC}{2} = 67,5^0$.

Xét tam giác vuông $OHB$ có

$$\sin \angle OBC = \sin \angle OBH = \frac{OH}{OB} \Rightarrow OH = OB.\sin \angle OBH = 1,6.\sin 67,5^0$$

$$\cos \angle OBC = \cos \angle OBH = \frac{BH}{OB} \Rightarrow BH = OB.\cos \angle OBH = 1,6.\cos 67,5^0 \Rightarrow BC = 3,2.\cos 67,5^0$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2}OH.BC = \frac{1}{2}.1,6.\sin 67,5^0.3,2.\cos 67,5^0 = 2,56\sin 67,5^0.\cos 67,5^0$$

Ta có $S_{qOBC} = \dfrac{\pi R^2.45}{360} = \dfrac{3,14.1,6^2}{8} = 1,0048\left(cm^2\right)$.

$\Rightarrow$ Diện tích phần hình không tô đậm là: $S_1 = 2\left(S_{qOBC} - S_{\Delta OBC}\right) \approx 0,1994\left(cm^2\right)$.

Diện tích phần hình tô đậm là: $S_2 = S - S_1 \approx 7,839\left(cm^2\right)$.

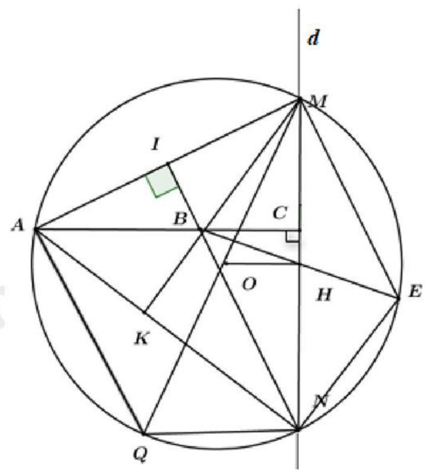
Vậy chi phí để sơn toàn bộ biển quảng cáo là:

$$150\,000S_2 + 200\,000S_1 \approx 1215\,000 \text{ (đồng).}$$

**Bài 3 (3,0 điểm):**

**Cách giải:**

***Cho ba điểm $A,B,C$ cố định sao cho $A,B,C$ thẳng hàng, $B$ nằm giữa $A$ và $C$. Gọi $(d)$ là đường thẳng đi qua $C$ và vuông góc với $AB$. Lấy điểm $M$ tùy ý trên $(d)$. Đường thẳng đi qua $B$ và vuông góc với $AM$ cắt các đường thẳng $AM$, $(d)$ lần lượt tại $I,N$. Đường thẳng $MB$ cắt $AN$ tại $K$.***




***a) Chứng minh rằng: tứ giác $MIKN$ nội tiếp***

Tam giác $AMN$ có $\begin{cases} AC \perp MN\ (gt) \\ IN \perp AM\ (gt) \\ AC \cap NI = \{B\} \end{cases}$, suy ra $B$ là trực tâm tam giác $AMN$ $\Rightarrow MK \perp AN$.

Xét tứ giác $MIKN$ có $\angle MIN = \angle MKN = 90^0$

Suy ra tứ giác $MIKN$ nội tiếp (Tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

***b) Chứng minh $CM.CN = AC.BC$***

Xét tam giác $MBC$ và tam giác $ANC$ có:

$\angle MCB = \angle ACN = 90^0$;

$\angle CMB = \angle CAN$ (cùng phụ với $\angle ANM$ ).

$\Rightarrow \Delta MBC \sim \Delta ANC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{BC}{CN} = \dfrac{MC}{AC} \Rightarrow CM.NC = AC.BC\ (dpcm)$.

Điều phải chứng minh.

***c) Gọi $O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $AMN$. Vẽ hình bình hành $MBNE$. Gọi $H$ là trung điểm của đoạn $BE$. Chứng minh rằng $OH$ vuông góc với đường thẳng $(d)$ và $OH = \frac{1}{2}AB$,***

Tứ giác $BMEN$ là hình bình hành có $H$ là trung điểm $BE$ nên $H$ đồng thời là trung điểm của $MN$ (tính chất hình bình hành).

Ta có: $OM = ON$ suy ra tam giác $OMN$ cân tại $O$.

Lại có $H$ là trung điểm của $MN$, suy ra $OH \perp MN$ hay $OH \perp (d)$ (trong tam giác cân, đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

Gọi $Q$ là giao điểm giữa $MO$ với đường tròn $(O)$ $(Q \neq M)$ $\Rightarrow MQ$ là đường kính của $(O)$.

Ta có tam giác $MQN$ có $\begin{cases} HM = HN\ (cmt) \\ QO = OM\ (cach\ ve) \end{cases}$

Suy ra $OH$ là đường trung bình của tam giác $MQN$ $\Rightarrow OH = \frac{1}{2}QN\ (1)$ (tính chất đường trung bình của tam giác).

Ta có: $\angle MNQ = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow MN \perp NQ$.

Mà $AB \perp MN\ (gt) \Rightarrow AB // NQ$ (từ vuông góc đến song song)

Chứng minh tương tự ta có $AQ // BN$.

Suy ra tứ giác $ABNQ$ là hình bình hành (dhnb) $\Rightarrow AB = NQ\ \ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $OH=\frac{1}{2}AB$ (đpcm).

**Bài 4 (2,0 điểm):**

**Cách giải:**

*a) Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x^2+y^2-4x=57 & (1) \\ |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}=1 & (2) \end{cases}$.

+ Nếu $x>2$ thì $x-1>1$.

$\Rightarrow |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}>1 \Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $x<1 \Rightarrow 2-x>1$.

$\Rightarrow |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}>1 \Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $1<x<2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x-1<1 \\ 0<2-x<1 \end{cases}$

Khi đó ta có $\begin{cases} |x-1|^{2021}<|x-1|=x-1 \\ |x-2|^{2020}=|2-x|^{2020}<|2-x|=2-x \end{cases}$

$\Rightarrow |x-1|^{2021}+|x-2|^{2020}=1<x-1+2-x=1 \Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $x=1$ (thỏa mãn (2)), thay vào (1) ta có $1+y^2-4=57 \Leftrightarrow y^2=60 \Leftrightarrow y=\pm 2\sqrt{15}$.

+ Nếu $x=2$ (thỏa mãn (2)), thay vào (1) ta có $4+y^2-8=57 \Leftrightarrow y^2=61 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{61}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)\in\left\{\left(1;2\sqrt{15}\right);\left(1;-2\sqrt{15}\right);\left(2;\sqrt{61}\right);\left(2;-\sqrt{61}\right)\right\}$.

***b) Cho $a$ và $b$ là hai số hữu tỉ. Chứng minh rằng $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ cũng là số hữu tỉ thì $a=b=0$.***

Ta có $\left(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\right)\left(a\sqrt{2}-b\sqrt{3}\right)=2a^2-3b^2$.

Vì $a,\, b\in\mathbb{Q}\Rightarrow 2a^2-3b^2\in\mathbb{Q}\Rightarrow\left(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\right)\left(a\sqrt{2}-b\sqrt{3}\right)\in\mathbb{Q}$.

Mà $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\Rightarrow a\sqrt{2}-b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}\left(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\right)+\left(a\sqrt{2}-b\sqrt{3}\right)\in\mathbb{Q} \\ \left(a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\right)-\left(a\sqrt{2}-b\sqrt{3}\right)\in\mathbb{Q}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a\sqrt{2}\in\mathbb{Q} \\ 2b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}\end{cases}\Rightarrow a=b=0.$$

Vậy với $a,\, b\in\mathbb{Q}$, nếu $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$ cũng là số hữu tỉ thì $a=b=0$ (đpcm).

----------------**HẾT**----------------