Câu 1 (2,0 điểm):

Cách giải:

1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{8x-1}}$

Biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{8x-1}}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}8x+1\ne 0\\ 8x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 8x+1>0\Leftrightarrow x>\dfrac{-1}{8}$.

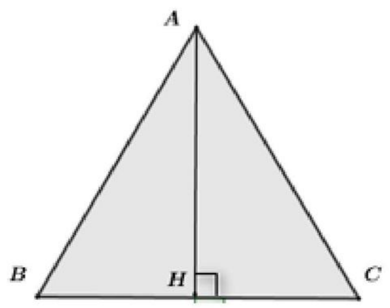
Vậy với $x>\dfrac{-1}{8}$ thì biểu thức $P=\dfrac{1}{\sqrt{8x-1}}$ xác định.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m ***để đường thẳng*** $y=mx+1\ \left(m\ne 0\right)$ ***và đường thẳng*** $y=9x+2$ ***song song.***

Để $y=mx+1$ song song với đường thẳng $y=9x+2$ khi và chỉ khi $\begin{cases}m=9\ \left(tmdk\right)\\ 1\ne 2\ \left(luon\ dung\right)\end{cases}$

Vậy $m=9$.

3) Tính chiều cao của tam giác đều ABC ***đều có cạnh bằng*** $2\sqrt{3}$ ***cm***



Kẻ $AH\perp BC\ \left(H\in BC\right)$. Vì tam giác ABC đều có AH là đường cao nên AH đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow HB=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}.2\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

Tam giác AHB vuông tại H có: $AB^2=AH^2+BH^2$ (định lý Pytago).

$\Rightarrow AH=\sqrt{AB^2-HB^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9}=3\ \left(cm\right)$.

Vậy chiều cao của tam giác đều ABC đều có cạnh bằng $2\sqrt{3}$ cm là $AH=3\ cm$.

4) Tính thể tích của hình nón có chiều cao bằng 4 ***cm và bán kính đáy*** $3cm$

Thể tích của hình nón có chiều cao $h = 4\ cm$ và bán kính đáy $R = 3\ cm$ là:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi .3^2.4 = 12\pi\ \left(cm^3\right)$$

Câu 2 (1,5 điểm):

Cách giải:

Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right).\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}$ ***với*** $x > 0;\ x \ne 1$

1) Rút gọn biểu thức Q.

Với $x > 0;\ x \ne 1$ ta có

$$\begin{aligned}
Q &= \left(\frac{x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right).\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1} \\
&= \left(\frac{x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right).\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1} \\
&= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1} \\
&= \frac{x+(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}.\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1} \\
&= \frac{x+x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}.\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1} \\
&= \frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}.\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1} \\
&= \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}.\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1} \\
&= \frac{x+25}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Vậy với $x > 0;\ x \ne 1$ thì $Q = \frac{x+25}{\sqrt{x}}$.

2) Tìm x ***để*** Q ***có giá trị bằng*** 10.

Với $x > 0;\ x \ne 1$, ta có: $Q = \frac{x+25}{\sqrt{x}}$

Để $Q=10 \Leftrightarrow \dfrac{x+25}{\sqrt{x}}=10$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x+25-10\sqrt{x}=0\\
&\Leftrightarrow x-10\sqrt{x}+25=0\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-5\right)^2=0\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x}-5=0\\
&\Leftrightarrow x=25\ \ (tm)
\end{aligned}$$

Vậy để $Q=10$ thì $x=25$.

Câu 3 (2,5 điểm)

Cách làm

1) Cho phương trình** $x^2-2(m+1)x+m^2+1=0\ \ (1)$ **với** m **là tham số.

***a) Giải phương trình** (1) **khi** $m=3$.*

Thay $m=3$ vào phương trình (1) ta có: $x^2-8x+9+1=0 \Leftrightarrow x^2-8x+10=0$.

Ta có $\Delta'=4^2-10=6>0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x=4+\sqrt{6}\\ x=4-\sqrt{6}\end{array}\right.$.

Vậy với $m=3$ thì tập nghiệm của phương trình (1) là $S=\left\{4+\sqrt{6};4-\sqrt{6}\right\}$.

***b) Tìm tất cả các giá trị của** m **để phương trình** (1) **có hai nghiệm phân biệt** x_1,x_2 **thỏa mãn** $x_1=x_2+2$*

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 $\Leftrightarrow \Delta'>0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (m+1)^2-m^2-1>0\\
&\Leftrightarrow m^2+2m+1-m^2-1>0.\\
&\Leftrightarrow 2m>0 \Leftrightarrow m>0
\end{aligned}$$

Khi đó, áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}=2m+2 & (1)\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=m^2+1 & (2)\end{cases}$

Thay $x_1=x_2+2$ vào (1) ta được: $2x_2+2=2m+2 \Leftrightarrow x_2=m \Rightarrow x_1=m+2$

Thay $x_1=m+2;\ x_2=m$ vào (2) ta được: $m(m+2)=m^2+1 \Leftrightarrow 2m=1 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$ (TMĐK)

Vậy $m=\dfrac{1}{2}$ là giá trị thỏa mãn bài toán.

2) Giải phương trình $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-2}-2\sqrt{2}=0$

Ta có: $\sqrt{6-x}+\sqrt{x-2}-2\sqrt{2}=0$ (ĐK: $2\le x\le 6$)

$\Leftrightarrow \sqrt{6-x}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 6-x+x-2+2\sqrt{(6-x)(x-2)}=8$

$\Leftrightarrow 4+2\sqrt{6x-12-x^2+2x}=8$

$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+8x-12}=2$

$\Leftrightarrow -x^2+8x-12=4$

$\Leftrightarrow x^2-8x+16=0$

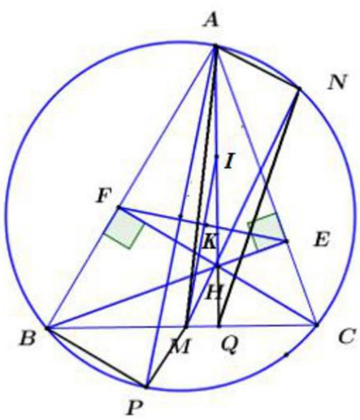
$\Leftrightarrow (x-4)^2=0 \Leftrightarrow x=4$ (TMĐK)

Vậy $x=4$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 4 (3,0 điểm):

Cách giải:

Cho tam giác nhọn $ABC\ (AB>AC)$ ***nội tiếp đường tròn tâm*** O ***và đường kính*** AP***. Các đường cao*** BE***,*** CF ***cắt nhau tại*** H***.***



1) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ ***nội tiếp và*** $AE.AC=AF.AB$

Tứ giác $BCFE$ có: $\angle BFC=\angle BEC=90^0\ (gt)$

Suy ra tứ giác $BCFE$ nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \angle FCE=\angle FBE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EF).

Xét tam giác AEB và tam giác AFC có: $\begin{cases}\angle FCE=\angle FBE\ (cmt)\\ \angle EAB=\angle FAC\end{cases}$

$\Rightarrow \Delta AEB\sim\Delta AFC\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}\Rightarrow AE.AC=AF.AB$ (đpcm).

2) Gọi K, I lần lượt là trung điểm của EF và AH. Chứng minh $AP \perp EF$ và $AP // IK$.

Trong (O) ta có $\angle BPA = \angle ACB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Mặt khác ta có:

$\angle BAP + \angle APB = 90^0$ (tam giác ABP vuông tại B do có $\angle ABP = 90^0$ - góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\angle EBC + \angle ACB = 90^0$ (tam giác BEC vuông tại E)

$\Rightarrow \angle BAP = \angle EBC$.

Ta lại có: $\angle EFC = \angle EBC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC của tứ giác $BCEF$ nội tiếp)

$\Rightarrow \angle EFC = \angle BAP$.

Ta có $\angle EFC + \angle AFE = \angle AFC = 90^0 \Rightarrow \angle BAP + \angle AFE = 90^0$.

Suy ra $AP \perp FE$ (đpcm).

Tam giác FAH vuông tại F có I là trung điểm của AH

$\Rightarrow IA = IH = FI = \frac{1}{2}AH$ (định lí đường trung tuyến trong tam giác vuông).

Chứng minh tương tự tam giác AHE ta có $IA = IE = IH = \frac{1}{2}AH$.

$\Rightarrow IE = IF \Rightarrow \Delta IEF$ cân tại I. Lại có K là trung điểm của EF (gt) $\Rightarrow IK \perp FE$ (đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

Mà $AP \perp EF\ (cmt) \Rightarrow AP // IK$ (đpcm).

3) Gọi M là giao điểm của IK với BC, N là giao điểm của MH với cung nhỏ AC của đường tròn (O). Chứng minh rằng M là trung điểm của BC và $\angle HMC = \angle HAN$.

Ta có $\angle ABP = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AB \perp BP$.

Lại có $CH \perp AB\ (gt) \Rightarrow CH // BP$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $BH // CP$.

Ta có tứ giác $BHCP$ có $\begin{cases} BH // CP\ (cmt) \\ HC // BP\ (cmt) \end{cases}$. Suy ra tứ giác $BHCP$ là hình bình hành (dhnb).

Gọi M' là giao điểm của HP và BC $\Rightarrow M'$ là trung điểm của HP, BC (tính chất hình bình hành).

Tam giác AHP có $\begin{cases} AI = IH\ (gt) \\ M'P = M'H\ (cmt) \end{cases} \Rightarrow IM' // AP$

Mặt khác ta có $IM // AP$, $M \in BC, M' \in BC$. Suy ra $M \equiv M'$

Suy ra M là trung điểm của BC và M, H, P thẳng hàng.

$\Rightarrow \angle ANP = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Gọi Q là giao điểm của AH với $BC \Rightarrow \angle AQM = 90^0$.

Tứ giác $ANQM$ có: $\angle ANP = \angle AQM = 90^0\ (cmt)$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ANQM$ nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$\Rightarrow \angle QAN = \angle QMN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung NQ) hay $\angle HMC = \angle HAN$ (đpcm).

Câu 5 (1,0 điểm)

Cách giải:

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+3y+2} = 3\sqrt{y} + \sqrt{x+2} & (1) \\ y^2 + x^2 + 2x = 0 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $y \ge 0;\ x+2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -2$

Đặt $\sqrt{x+2} = a;\ \ \sqrt{y} = b\ (a, b \ge 0)$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+3b^2} = a+3b \\ &\Leftrightarrow 4\left(a^2+3b^2\right) = a^2+6ab+9b^2 \\ &\Leftrightarrow 4a^2+12b^2-a^2-6ab-9b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3a^2-6ab+3b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3(a-b)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \\ &\Rightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{y} \Rightarrow y = x+2 \end{aligned}$$

Thay $y = x+2$ vào (2) ta được:

$$(x+2)^2 + x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x^2+6x+4 = 0 \Leftrightarrow x^2+3x+2 = 0$$

Ta có $a-b+c = 1-3+2 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{c}{a} = -2 \end{array}\right.(tm)$

Với $x = -1 \Rightarrow y = x+2 = -1+2 = 1\ (tm)$.

Với $x = -2 \Rightarrow y = x+2 = -2+2 = 0\ (tm)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có cặp nghiệm $(x, y) \in \{(-1, 1); (-2, 0)\}$

2) Cho x, y, z ***là các số dương thỏa mãn*** $xyz = 1$. ***Chứng minh rằng***

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}\ge 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Ta có:

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}\ge 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3\ge 2\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Đặt $\frac{1}{x}=a, \frac{1}{y}=b, \frac{1}{z}=c\ (a, b, c>0, abc=1)$.

Khi đó ta có: $\frac{x}{y+z}=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{\frac{1}{a}}{\frac{b+c}{bc}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{a^2(b+c)}$

Tương tự ta có: $\frac{y}{z+x}=\frac{1}{b^2(c+a)}; \frac{z}{x+y}=\frac{1}{c^2(a+b)}$.

Do đó ta cần chứng minh $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge 2\left(\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\right)$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\ge\frac{3}{a^2b}, \frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{c^3}\ge\frac{3}{a^2c}$.

Cộng vế theo vế 2 BĐT trên ta được: $\frac{4}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge\frac{3}{a^2b}+\frac{3}{a^2c}\ge\frac{12}{a^2(b+c)}$.

Tương tự ta có

$$\frac{4}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}\ge\frac{12}{b^2(c+a)}$$

$$\frac{4}{c^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\ge\frac{12}{c^2(a+b)}$$

Cộng vế theo vế ta có

$$6\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)\ge 12\left(\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge 2\left(\frac{1}{a^2(b+c)}+\frac{1}{b^2(c+a)}+\frac{1}{c^2(a+b)}\right)(dpcm)$$

-------HẾT-------