

Giải bài 1 trang 106 sách bài tập Toán lớp 10 tập 1

Cho a, b, c, d là những số dương; x, y, z là những số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$$

Lời giải:

$$x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-y) + y^3(y-x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^3 - y^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(x^2 + y^2 + xy) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Giải Toán lớp 10 SBT tập 1 bài 2 trang 106

Cho a, b, c, d là những số dương; x, y, z là những số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$$

Lời giải:

$$x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4y^2 - 12y + 3(z^2 - 2z) + 14 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (2y-3)^2 + 3(z-1)^2 + 1 > 0 \text{ (đúng)}$$

Giải bài 3 SBT Toán lớp 10 tập 1 trang 106

Cho a, b, c, d là những số dương; x, y, z là những số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} &\geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}\sqrt{b}} &\geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - \sqrt{ab}) &\geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{ab} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - 2\sqrt{ab}) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\geq 0 \text{ (đúng)} \end{aligned}$$

Giải SBT Toán lớp 10 tập 1 bài 4 trang 106

Cho a, b, c, d là những số dương; x, y, z là những số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

Lời giải:

Từ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$ và $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ suy ra

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \text{ hay } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

Giải bài 5 sách bài tập Toán 10 tập 1 trang 106

Cho a, b, c, d là những số dương; x, y, z là những số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

Lời giải:

Từ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ và $c + d \geq 2\sqrt{cd}$ suy ra

$$a + b + c + d \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})$$

$$\Rightarrow 2.2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

$$\Rightarrow a+b+c+d \geq 2.2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

Giải bài 6 SBT Toán 10 tập 1 trang 106

Cho a, b, c, d là những số dương; x, y, z là những số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{16}{a+b+c+d}$$

Lời giải:

Từ $a+b+c+d \geq \sqrt[4]{abcd}$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}}$$

Suy ra $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16$

Hay $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{16}{a+b+c+d}$

Giải SBT Toán 10 tập 1 bài 7 trang 106

Cho a, b, c, d là những số dương; x, y, z là những số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a^2b + \frac{1}{b} \geq 2a$$

Lời giải:

$$a^2b + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a^2b \cdot \frac{1}{b}} = 2a$$

Giải bài 8 Toán lớp 10 SBT tập 1 trang 106

Cho a, b, c, d là những số dương; x, y, z là những số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Lời giải:

$$\text{Từ } a+b \geq 2\sqrt{ab}, b+c \geq 2\sqrt{bc}, c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

$$\text{Suy ra: } (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Giải bài 9 trang 106 sách bài tập Toán 10 tập 1

Cho a, b, c, d là những số dương; x, y, z là những số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$$

Lời giải:

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{(a+b) \cdot 2\sqrt{ab}}$$

Giải SBT Toán lớp 10 tập 1 bài 10 trang 106

Cho a, b, c, d là những số dương; x, y, z là những số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) &= 1+1+1 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \\ &\geq 3+2+2+2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \end{aligned}$$

Giải sách bài tập Toán 10 tập 1 bài 11 trang 106

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{4}{x} + \frac{9}{1-x} \text{ với } 0 < x < 1.$$

Lời giải:

$$y = \frac{4(x+1-x)}{x} + \frac{9(x+1-x)}{1-x}$$

$$= 4 + 9 + \frac{4(1-x)}{x} + 9 \cdot \frac{x}{1-x} \geq 13 + 2\sqrt{4 \cdot \frac{(1-x)}{x} \cdot 9 \cdot \frac{x}{1-x}} = 25$$

$$\Rightarrow y \geq 25, \forall x \in (0;1)$$

Đẳng thức $y = 25$ xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{4(1-x)}{x} = \frac{9x}{1-x} = 6 \\ x \in (0;1) \end{cases}$$

hay $x = \frac{2}{5}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 25 đạt tại $x = \frac{2}{5}$

Giải bài 12 SBT Toán 10 tập 1 trang 106

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = 4x^3 - x^4 \text{ với } 0 \leq x \leq 4$$

Lời giải:

$$y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$$

$$\Rightarrow 3y = x \cdot x \cdot x(12 - 3x) \leq \left(\frac{x+x}{2}\right)^2 \left(\frac{x+12-3x}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 48 \leq [2x(12 - 2x)]^2 \leq \left(\frac{2x+12-2x}{2}\right)^4 = 6^4$$

$$\Rightarrow y \leq \frac{6^4}{48} = 27, \forall x \in [0;4]$$

$$y = 27 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ x = 12 - 3x \\ 2x = 12 - x \\ x \in [0;4] \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng 27 đạt được khi $x = 3$.

Giải SBT Toán 10 tập 1 bài 13 trang 106

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số sau trên tập xác định của nó

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$$

Lời giải:

Vế phải có nghĩa khi $1 \leq x \leq 5$

Ta có: $y^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x})^2 = 4 + 2\sqrt{(x-1)(5-x)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 \geq 4, \forall x \in [1; 5] \\ y^2 \leq 4 + (x-1) + (5-x) = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 2 \\ y \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \forall x \in [1; 5]$$

Hơn nữa $y = 2 \Leftrightarrow (x-1)(5-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

$$y = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x-1 = 5-x \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng $2\sqrt{2}$ khi $x = 3$, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 2 khi $x = 1$ hoặc $x = 5$.

Giải Toán lớp 10 sách bài tập tập 1 bài 14 trang 106

Chứng minh rằng:

$$|x-z| \leq |x-y| + |y-z|, \forall x, y, z$$

Lời giải:

$$|x-z| = |(x-y) + (y-z)| \leq |x-y| + |y-z|$$