

Ghi chú: Anh/Chị vui lòng ghi nguồn TuyenSinh247.com khi đăng tải

Bài I (2,0 điểm)

Cách giải:

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 9$.

Thay $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{16+3}} = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$$

Vậy khi $x=16$ thì $A = \frac{4}{7}$.

2) Chứng minh $A+B = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$.

Rút gọn biểu thức B :

Với $x \geq 0, x \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9} \\ \Leftrightarrow B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} \\ \Leftrightarrow B &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x+3}) - (3x+9)}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} \\ \Leftrightarrow B &= \frac{2x+6\sqrt{x}-3x-9}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} \\ \Leftrightarrow B &= \frac{-x+6\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{-(\sqrt{x-3})^2}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})}$$

$$\Leftrightarrow B = -\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}$$

Do đó khi $x \geq 0, x \neq 9$ thì $B = -\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} A+B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x+3}} \text{ (dpcm)} \end{aligned}$$

Vậy $A+B = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$ (với $x \geq 0, x \neq 9$).

Bài II (2,5 điểm)

Cách giải:

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một tổ sản xuất phải làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày tổ đã làm được nhiều hơn 100 bộ đồ bảo hộ y tế so với bộ đồ bảo hộ y tế phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 8 ngày trước khi hết thời hạn, tổ sản xuất đã làm xong 4800 bộ đồ bảo hộ y tế đó. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu bộ đồ bảo hộ y tế? (Giả định rằng số bộ đồ bảo hộ y tế mà tổ đó làm xong trong mỗi ngày là bằng nhau).

Gọi số bộ đồ bảo hộ y tế tổ sản xuất phải làm trong một ngày theo kế hoạch là x (bộ), ($x \in \mathbb{N}^+, x < 4800$).

\Rightarrow Thời gian theo kế hoạch tổ sản xuất làm xong 4800 bộ đồ là: $\frac{4800}{x}$ (ngày).

Thực tế mỗi ngày, tổ đó làm được số bộ đồ bảo hộ y tế là: $x+100$ (bộ).

\Rightarrow Thời gian thực tế tổ sản xuất làm xong 4800 bộ đồ là: $\frac{4800}{x+100}$ (ngày).

Theo đề bài, tổ sản xuất đã làm xong 4800 bộ đồ trước 8 ngày so với kế hoạch nên ta có phương trình:

$$\frac{4800}{x} - \frac{4800}{x+100} = 8$$

$$\Leftrightarrow 4800(x+100) - 4800x = 8x(x+100)$$

$$\Leftrightarrow 600(x+100) - 600x = x(x+100)$$

$$\Leftrightarrow 600x + 60000 - 600x = x^2 + 100x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 100x - 60000 = 0$$

Phương trình có: $\Delta' = 50^2 + 60000 = 62500 > 0$

\Rightarrow Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -50 + \sqrt{62500} = 200$ (tm) và $x_2 = -50 + \sqrt{62500} = -300$ (ktm)

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm 200 bộ đồ bảo hộ y tế.

2) Một thùng nước có dạng hình trụ với chiều cao 1,6m và bán kính đáy 0,5m. Người ta sơn toàn bộ phía ngoài một xung quanh một xung quanh của thùng nước này (trừ hai mặt đáy). Tính diện tích bề mặt được sơn của thùng nước (lấy $\pi \approx 3,14$).

Thùng nước hình trụ có chiều cao $h = 1,6m$ và bán kính đáy $R = 0,5m$.

Diện tích bề mặt được sơn của thùng nước là:

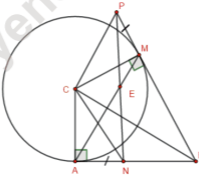
$$2\pi Rh = 2.3,14.0,5.1,6 = 5,024 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vậy diện tích bề mặt được sơn của thùng nước là $5,024m^2$.

Bài IV (3,5 điểm)

Cách giải:

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ đường tròn tâm C , bán kính CA . Từ điểm B kẻ tiếp tuyến BM với đường tròn $(C;CA)$ (M là tiếp điểm, M và A nằm khác phía nhau đối với đường thẳng BC).



1) Chứng minh bốn điểm A, C, M và B cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: tam giác ABC vuông tại A nên $\angle BAC = 90^\circ$

MB là tiếp tuyến của đường tròn $(C;CA)$ nên $\angle CMB = 90^\circ$ (định nghĩa tiếp tuyến của đường tròn)

Xét tứ giác $ACMB$ ta có: $\angle CAB + \angle CMB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow ACMB$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180°).

2) Lấy điểm N thuộc đoạn thẳng AB (N khác A, N khác B). Lấy điểm P thuộc tia đối của MB sao cho $MP = AN$. Chứng minh tam giác CPN là tam giác cân và đường thẳng AM đi qua trung điểm của đoạn thẳng NP .

Bài V (0,5 điểm)

Cách giải:

Với các số thực a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(a+b) + ab$.

$$\text{Ta có } (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 2 + 2ab \Rightarrow ab = \frac{2 - (a+b)^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}(a+b)^2$$

$$\text{Khi đó ta có: } P = 3(a+b) + ab = 3(a+b) + 1 - \frac{1}{2}(a+b)^2$$

Áp dụng BDT Bunhiacopski ta có: $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 2.2 = 4 \Rightarrow -2 \leq a+b \leq 2$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} a+b \geq -2 \\ (a+b)^2 \leq 4 \Rightarrow -\frac{1}{2}(a+b)^2 \geq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P \geq 3.(-2) + 1 + (-2) = -7$$

$$\Rightarrow P_{\min} = -7$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a = b \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng -7 , đạt được khi $a = b = -1$.