SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2021-2022
Khóa ngày: 04/6/2021
Môn: Toán (Hệ chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút

HƯỚNG DẪN CHẤM

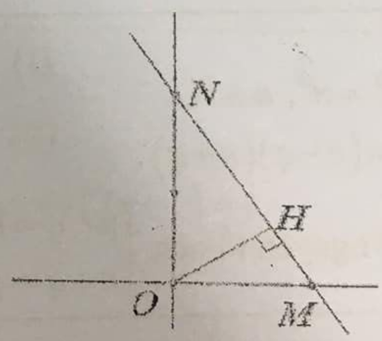
Bài 1: *(1,5 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{1}{a^2-\sqrt{a}}:\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+a+a\sqrt{a}}$, với $a>0, a\neq 1$.

2. Cho hàm số $y=(m-2)x+2$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng (d).

a) Tìm điều kiện của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng 1.

Tóm tắt cách giải	Điểm
1.1. $A=\dfrac{1}{a^2-\sqrt{a}}:\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+a+a\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}\left(1+\sqrt{a}+a\right)}{\left(\sqrt{a^4}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$ $=\dfrac{\sqrt{a}\left(1+\sqrt{a}+a\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a^3}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}=\dfrac{\left(1+\sqrt{a}+a\right)}{\left(\sqrt{a^3}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$	0,25 điểm
$=\dfrac{a+\sqrt{a}+1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}=\dfrac{1}{a-1}$ Vậy $A=\dfrac{1}{a-1}$	0,25 điểm
1.2.a Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow m-2>0$ $\Leftrightarrow m>2$	0,25 điểm 0,25 điểm
1.2.b. Với $m=2$, $(d): y=2$ cách O một khoảng bằng 2. (không thỏa) Với $m\neq 2$, gọi M, N lần lượt là giao điểm của (d) với trục hoành, trục tung. Hoành độ của M là nghiệm của phương trình: $(m-2)x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{2-m}$ $\Rightarrow OM=\dfrac{2}{\lvert 2-m\rvert}$.  Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $ON=2$ Gọi OH là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d), áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông OMN ta có:	0,25 điểm

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}\Leftrightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{(2-m)^2}{4}+\frac{1}{4}.$ Mà $OH=1$ nên: $\frac{(2-m)^2}{4}+\frac{1}{4}=1\Leftrightarrow m^2-4m+5=4\Leftrightarrow (m-2)^2=3$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2=\sqrt{3}\\ m-2=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2-\sqrt{3}\\ m=2+\sqrt{3}\end{array}\right.$	0,25 điểm

Bài 2: *(1,5 điểm)*

1. Cho a là số nguyên lẻ và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng a^2-2021^2 chia hết cho 24.

2. Cho các số nguyên tố p, q thỏa mãn $p+q^2$ là số chính phương. Chứng minh rằng:

a) $p=2q+1$.

b) p^2+q^{2021} không phải là số chính phương.

Tóm tắt cách giải	Điểm
2.1. Vì a là số nguyên lẻ nên $a=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}$. Từ đó $a^2=4k^2+4k+1\Rightarrow a^2-1=4k(k+1)\vdots 8$ (1) (vì $k(k+1)\vdots 2$). Mặt khác, a không chia hết cho 3 nên $a=3q\pm1,\ q\in\mathbb{Z}$. $a^2=9q^2\pm6k+1\Rightarrow a^2-1\vdots 3$. (2) Từ (1) và (2), ta được $a^2-1\vdots 24$. Từ đó $a^2-2021^2=(a^2-1)-(2021^2-1)=(a^2-1)-2020\times2022$ $=(a^2-1)-2^2\times5\times101\times2\times3\times337\vdots 24$	0,25 điểm 0,25 điểm
2.2.a) Đặt $p+q^2=n^2,\ n\in\mathbb{N}$. Suy ra $p=(n-q)(n+q)$. Vì p là số nguyên tố nên $\begin{cases} n-q=1\\ n+q=p\end{cases}$. Do đó $p=2q+1$.	0,25 điểm 0,25 điểm
2.2.b) Giả sử p^2+q^{2021} là số chính phương, đặt $p^2+q^{2021}=m^2$. Suy ra $q^{2021}=(m-p)(m+p)$. Có 2 trường hợp: *Trường hợp 1:*	

<table>
<tr><td>

$\begin{cases} m-p=1 \\ m+p=q^{2021} \end{cases} \Rightarrow q^{2021}-1=2p=4q+2 \Rightarrow q^{2021}=4q+3$. Suy ra $3 \vdots q$, từ đó $q=3$. Tuy nhiên, khi đó đẳng thức $q^{2021}=4q+3$ không xảy ra.

</td><td>0,25 điểm</td></tr>
<tr><td>

Trường hợp 2:

$\begin{cases} m-p=q^{a} \\ m+p=q^{b} \end{cases}$ với $a,\ b \in \mathbb{N}^{*}, a+b=2021$. Suy ra $q^{b}-q^{a}=2p=4q+2$. Từ đó $2 \vdots q$ và $q=2$.

Khi đó $2^{b}-2^{a}=10 \Rightarrow 2^{a-1}\left(2^{b-a}-1\right)=5$.

Suy ra $\begin{cases} 2^{a-1}=1 \\ 2^{b-a}-1=5 \end{cases} \Rightarrow 2^{b-a}=6$ (vô lý)

Tóm lại, cả 2 trường hợp đều không xảy ra tức là điều giả sử sai hay nói cách khác p^2+q^{2021} không phải là số chính phương.

</td><td>0,25 điểm</td></tr>
</table>

Bài 3: *(2,5 điểm)*

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+7xy-4y^2=0 \\ \sqrt{x^2+y+6}+2y=1 \end{cases}$.

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2-5x+2m-2=0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2-4x_1+2m-2}+\sqrt{x_2}=3$.

3. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn $(c+a)(c+b)=4$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(c+b)^2} \geq 1.$$

<table>
<tr><th>Tóm tắt cách giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>

3.1) $\begin{cases} 2x^2+7xy-4y^2=0 \quad (1) \\ \sqrt{x^2+y+6}+2y=1 \quad (2) \end{cases}$

Từ $(1) \Leftrightarrow 2x^2-xy+8xy-4y^2=0 \Leftrightarrow x(2x-y)+4y(2x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x+4y)(2x-y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x \\ x=-4y \end{array}\right.$.

- Thay $x=-4y$ vào (2) ta được: $\sqrt{16y^2+y+6}=1-2y$

</td><td>0,25 điểm</td></tr>
</table>

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \le \frac{1}{2} \\ 16y^2 + y + 6 = (1-2y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le \frac{1}{2} \\ 12y^2 + 5y + 5 = 0 \end{cases}$. Vô nghiệm.	0,25 điểm
- Thay $y = 2x$ vào (2) ta được: $\sqrt{x^2 + 2x + 6} = 1 - 4x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4x \ge 0 \\ x^2 + 2x + 6 = 1 - 8x + 16x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{4} \\ 15x^2 - 10x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{1}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}$	0,25 điểm
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. Với $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$. Vậy hệ có nghiệm $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.	0,25 điểm
3.2 Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta = 25 - 4(2m-2) > 0 \\ S = 5 > 0 \\ P = 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{33}{8} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{33}{8}$.	0,25 điểm
Ta có $x_1 + x_2 = 5$, $x_1x_2 = 2m - 2$ và $x_1^2 - 5x_1 + 2m - 2 = 0$.	0,25 điểm
$\sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 2m - 2} + \sqrt{x_2} = 3$ $\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 - 5x_1 + 2m - 2 + x_1} + \sqrt{x_2} = 3$ $\Leftrightarrow \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 3$	0,25 điểm
$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x_1.x_2} = 2$ $\Leftrightarrow x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow 2m - 2 = 4 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa điều kiện). Vậy $m = 3$.	0,25 điểm
3.3. Đặt $x = c + a$, $y = c + b$. Khi đó $xy = 4$. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \ge 1$. Ta có $\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2}$ $= \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{(x-y)^2 + 2xy}{x^2y^2}$	

$=\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{(x-y)^2+8}{16}$ $=\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{(x-y)^2}{16}+\dfrac{1}{2}$ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{(x-y)^2}{16}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{(x-y)^2}.\dfrac{(x-y)^2}{16}}=\dfrac{1}{2}$	0,25 điểm
Do đó $\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\geq 1$, ta có điều phải chứng minh.	0,25 điểm

Bài 4: *(3,5 điểm)*

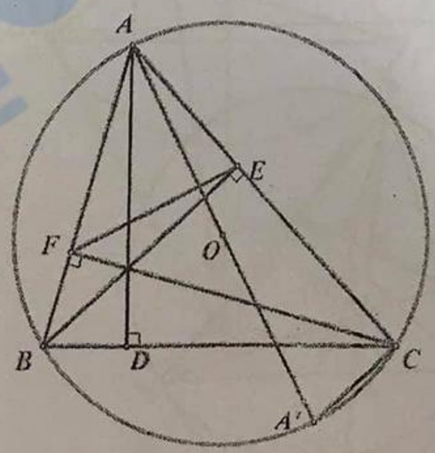
Cho đường tròn tâm O, bán kính $R=4$ cm và hai điểm B, C cố định trên (O), BC không là đường kính. Điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $\widehat{BAD}=\widehat{CAO}$.

b) Gọi M là điểm đối xứng của A qua BC, N là điểm đối xứng của B qua AC. Chứng minh rằng $CD.CN=CE.CM$.

c) Trong trường hợp 3 điểm C, M, N thẳng hàng, tính độ dài đoạn thẳng AB.

d) Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng AI cắt EF tại K. Gọi H là hình chiếu vuông góc của K lên BC. Chứng minh rằng đường thẳng AH luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Tóm tắt cách giải	Điểm
a)  Kẻ đường kính AA' của đường tròn (O). Khi đó tam giác ACA' vuông tại C nên $\widehat{CAO}=90°-\widehat{AA'C}$. Lại có $\widehat{BAD}=90°-\widehat{ABC}$.	0,5 điểm

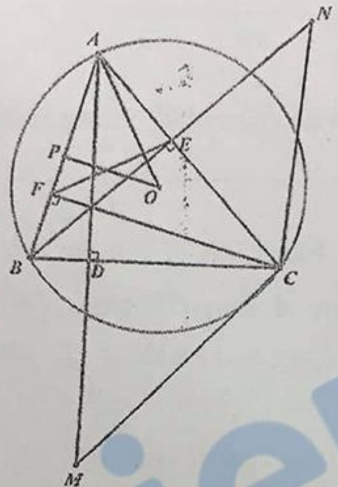
Mà $\widehat{ABC} = \widehat{AA'C}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$) nên $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$. — 0,5 điểm

b) Các tam giác vuông CAD và CBE có góc $\widehat{C}$ chung nên đồng dạng.

Suy ra $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{CE} \Rightarrow CA.CE = CB.CD$. — 0,5 điểm

Vì A, M đối xứng với nhau qua BC nên $CA = CM$. Tương tự $CB = CN$.

Từ đó $CD.CN = CE.CM$. — 0,5 điểm



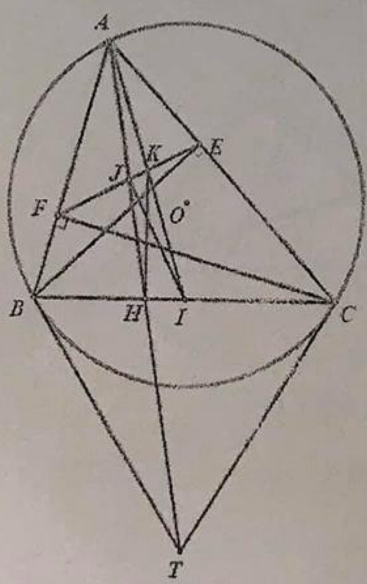
c) Theo tính chất đối xứng, ta có $\widehat{MCB} = \widehat{BCA} = \widehat{ACN}$.

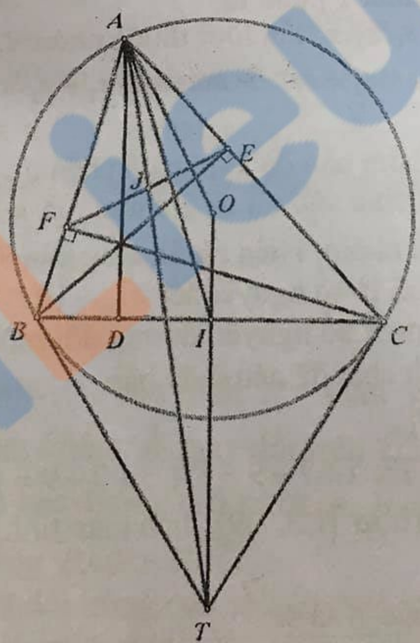
Do đó, trong trường hợp C, M, N thẳng hàng thì $\widehat{BCA} = 60°$. — 0,25 điểm

Gọi P là trung điểm của AB thì tam giác AOP vuông tại P và $\widehat{AOP} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB} = \widehat{ACB} = 60°$. — 0,25 điểm

Ta có $\sin\widehat{AOP} = \dfrac{AP}{AO} \Rightarrow AP = 2\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2AP = 4\sqrt{3}$. — 0,25 điểm

d)



Gọi J là trung điểm của EF. Các tam giác AEF và ABC có $\widehat{A}$ chung và $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (do tứ giác $BCEF$ nội tiếp) nên đồng dạng. Suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$. Mà $\frac{EF}{BC} = \frac{2EJ}{2BI} = \frac{EJ}{BI}$. Suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{EJ}{BI}$. Từ đó các tam giác AEJ và ABI đồng dạng. Suy ra $\widehat{AJE} = \widehat{AIB}$.	0,25 điểm
Ta có $\triangle IEF$ cân tại I (do $IE = IF = \frac{1}{2}BC$) nên $IJ \perp EF$. Tứ giác $IKJH$ có $\widehat{IHK} = \widehat{IJK} = 90°$ nên nội tiếp được đường tròn. Ta có $\widehat{AJE} + \widehat{HJK} = \widehat{AIB} + \widehat{HJK} = 180°$ (do tứ giác $IKJH$ nội tiếp), suy ra A, J, H thẳng hàng. (1)	0,25 điểm
Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại T.  Ta có $OA^2 = OB^2 = OI.OT \Rightarrow \frac{OA}{OI} = \frac{OT}{OA}$, kết hợp với góc $\widehat{O}$ chung ta được các tam giác OAI và OTA đồng dạng. Suy ra $\widehat{OAI} = \widehat{OTA}$. Mà $\widehat{OTA} = \widehat{DAT}$ (so le trong) nên $\widehat{OAI} = \widehat{DAT}$. Lại có $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$ (câu a) nên $\widehat{BAT} = \widehat{CAI}$. Từ đó $\widehat{BAI} = \widehat{CAT}$.	

Mà $\widehat{BAI} = \widehat{CAJ}$ (tam giác đồng dạng) nên $\widehat{CAT} = \widehat{CAJ}$. Do đó A, J, T thẳng hàng. (2) Từ (1) và (2) suy ra đường thẳng AH luôn đi qua điểm T cố định khi A di chuyển.	0,25 điểm

Bài 5: *(1,0 điểm)*

Cho tập hợp S gồm n số nguyên dương đôi một khác nhau $(n \geq 3)$ thỏa mãn tính chất: tổng của 3 phần tử bất kỳ trong S đều là số nguyên tố. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của n.

Tóm tắt cách giải	Điểm
Đặt $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$. Vì khi chia một số nguyên dương bất kỳ cho 3 ta có ba loại số dư là 0, 1, 2 nên ta chia các số $s_1, s_2, ..., s_n$ thành 3 nhóm: Nhóm I gồm các số chia 3 dư 1. Nhóm II gồm các số chia 3 dư 2. Nhóm III gồm các số chia hết cho 3. *Nếu $n \geq 5$ thì xảy ra một trong hai khả năng sau:*	0,25 điểm
Khả năng 1: Mỗi nhóm có ít nhất 1 phần tử. *Không mất tổng quát, giả sử s_1, s_2, s_3 lần lượt thuộc nhóm I, nhóm II, nhóm III. Khi đó* $s_1 + s_2 + s_3 \vdots 3$ và $s_1 + s_2 + s_3 > 3$ nên $s_1 + s_2 + s_3$ không phải là số nguyên tố.	0,25 điểm
Khả năng 2: Có ít nhất một nhóm nào đó không có phần tử. Khi đó, n số $s_1, s_2, ..., s_n$ được chia vào tối đa 2 nhóm mà $n \geq 5$ nên luôn tồn tại ít nhất 3 số thuộc cùng một nhóm. Hiển nhiên tổng của 3 số đó chia hết cho 3 và do đó cũng không phải là số nguyên tố. Tóm lại, tất cả các tập hợp gồm n số nguyên dương đôi một khác nhau mà $n \geq 5$ đều không thỏa mãn tính chất đã nêu ở đề bài.	0,25 điểm
Tiếp theo xét tập hợp $\{1, 3, 7, 9\}$. Ta có $1+3+7=11$; $1+3+9=13$; $1+7+9=17$; $3+7+9=19$ và 11, 13, 17, 19 đều là số nguyên tố nên tập hợp $\{1, 3, 7, 9\}$ thỏa mãn tính chất của bài toán. Vậy giá trị lớn nhất có thể có của n là 4.	0,25 điểm

Chú ý:

Mọi lời giải đúng, khác với hướng dẫn chấm, đều cho điểm tối đa theo từng câu và từng phần tương ứng.