

## Bài 1 (2,0 điểm):

### Cách giải:

Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a)  $x^2 + 3x - 4 = 0$

Ta có  $+b + c = 1 + 3 - 4 = 0$  nên phương trình có hai nghiệm phân biệt  $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$ .

Vậy tập nghiệm của phương trình là  $S = \{1; -4\}$ .

b)  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$

Ta có:  $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 8 \\ x = 4 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$ .

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = (0; 2)$ .

## Bài 2 (2,0 điểm):

### Cách giải:

Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $A = (\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{3}$

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{3} \\ &= (\sqrt{9 \cdot 3} + 3\sqrt{3 \cdot 4} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{3} \\ &= (3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) : \sqrt{3} \\ &= 7\sqrt{3} : \sqrt{3} = 7 \end{aligned}$$

Vậy  $A = 7$ .

b)  $B = \left( \frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{5}{\sqrt{x-3}} + \frac{6}{x-9} \right) : \frac{2}{\sqrt{x-3}}$  với  $x \geq 0$  và  $x \neq 9$

Với  $x \geq 0$  và  $x \neq 9$  ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= \left( \frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{5}{\sqrt{x-3}} + \frac{6}{x-9} \right) : \frac{2}{\sqrt{x-3}} \\
 &= \frac{\sqrt{x-3} + 5(\sqrt{x+3}) + 6}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} : \frac{2}{\sqrt{x-3}} \\
 &= \frac{6\sqrt{x} + 18}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{2} \\
 &= \frac{6(\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{2} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

Vậy với  $x \geq 0$  và  $x \neq 9$  thì  $B = 3$ .

**Bài 3 (1,5 điểm):**

**Cách giải:**

Cho hàm số  $y = 2x^2$  có đồ thị (P)

a) Vẽ đồ thị (P) trên mặt phẳng tọa độ (Oxy)

Hàm số có hệ số  $a = 2 > 0$  nên đồng biến với  $x > 0$  và nghịch biến với  $x < 0$ .

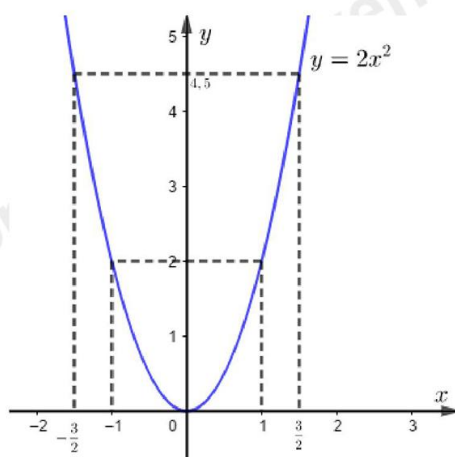
Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ  $O(0;0)$  và nhận  $Oy$  làm trục đối xứng.

Bảng giá trị:

$x$	$-\frac{3}{2}$	$-1$	$0$	$1$	$\frac{3}{2}$
$y = 2x^2$	$\frac{9}{2}$	$2$	$0$	$2$	$\frac{9}{2}$

$\Rightarrow$  Parabol  $y = 2x^2$  là đường cong đi qua các điểm  $\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right); (-1; 2); (0; 0); (1; 2); \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$ .

Đồ thị hàm số:



b) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $(d): y = 2mx + 1$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt có hoành độ là  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < x_2$  và  $|x_2| - |x_1| = 2021$ .

Hoành độ giao điểm của đường thẳng  $(d)$  và Parabol  $(P)$  là nghiệm của phương trình:

$$2x^2 = 2mx + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx - 1 = 0$$

Ta có:  $\Delta' = (-m)^2 - 2 \cdot (-1) = m^2 + 2 > 0$  với mọi  $m \in \mathbb{R}$ .

Suy ra đường thẳng  $(d)$  luôn cắt Parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.

Giả sử hai nghiệm đó là  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1 < x_2$ .

Theo định lí Vi-et, ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Vì tích  $x_1 x_2 = \frac{-1}{2} < 0$  và  $x_1 < x_2$  nên  $x_1 < 0, x_2 > 0$ . Do đó ta có:

$$|x_2| - |x_1| = 2021 \Leftrightarrow x_2 - (-x_1) = 2021 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2021 \Rightarrow m = 2021$$

Vậy  $m = 2021$  là giá trị cần tìm.

#### Bài 4 (1,0 điểm):

##### Cách giải:

Một phân xưởng theo kế hoạch phải may 1200 bộ quần áo trong một thời gian quy định. Khi thực hiện, do cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày phân xưởng may thêm được 10 bộ quần áo và hoàn thành kế hoạch trước 4 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng may bao nhiêu bộ quần áo?

Gọi  $x$  là số bộ quần áo phân xưởng may trong một ngày theo kế hoạch ( $x \in \mathbb{N}^*$ ).

Số bộ quần áo may trong một ngày trong thực tế là  $x + 10$  (bộ).

Thời gian may theo kế hoạch là  $\frac{1200}{x}$  ngày.

Thời gian may thực tế là  $\frac{1200}{x+10}$  ngày.

Vì phân xưởng hoàn thành kế hoạch trước 4 ngày nên ta có phương trình:  $\frac{1200}{x} - \frac{1200}{x+10} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{1200 \cdot (x+10-x)}{x(x+10)} = \frac{4x(x+10)}{x(x+10)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1200 \cdot 10}{x(x+10)} = \frac{4x(x+10)}{x(x+10)}$$

$$\Rightarrow x(x+10) = 3000$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 3000 = 0 \quad (1)$$

Ta có:  $\Delta' = 5^2 + 3000 = 3025 = 55^2 > 0$  nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-5+55}{1} = 50 \quad (tm) \\ x_2 = \frac{-5-55}{1} = -60 \quad (ktm) \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi ngày phân xưởng may 50 bộ quần áo.

### Bài 5 (1,0 điểm):

#### Cách giải:

Một cốc nước dạng hình trụ có chiều cao là 15cm, bán kính đáy là 3cm và lượng nước ban đầu trong cốc cao 10cm. Thả chìm hoàn toàn vào cốc nước 5 viên bi thủy tinh hình cầu có cùng bán kính là 1cm. Hỏi sau khi thả 5 viên bi, mực nước trong cốc cách miệng cốc một khoảng bằng bao nhiêu?

(Giả sử độ dày của thành cốc và đáy cốc không đáng kể; kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

$$\text{Thể tích của bi là } V_{bi} = 5 \cdot \frac{4}{3} \pi r_{bi}^3 = 5 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 1 = \frac{20}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Mặt khác thể tích của bi bằng thể tích của nước dâng nên ta có:

$$\frac{20}{3} \pi = \pi \cdot 3^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{20}{27} \text{ (cm)} \quad (h \text{ là chiều cao lượng nước dâng lên}).$$

$$\text{Chiều cao của nước sau khi thả 5 viên bi vào trong cốc là } 10 + \frac{20}{27} = \frac{290}{27} \text{ (cm)}$$

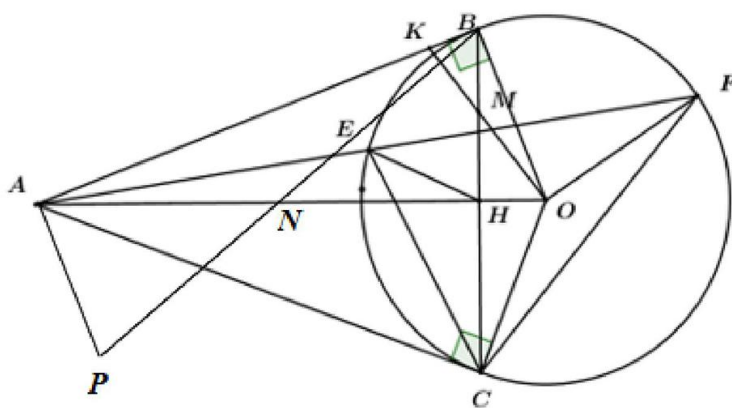
$$\text{Mực nước cách miệng cốc một khoảng là } 15 - \frac{290}{27} = \frac{115}{27} \approx 4,26 \text{ (cm)}$$

Vậy mực nước trong cốc cách miệng cốc là 4,26 cm.

### Bài 6 (2,5 điểm)

#### Cách giải:

Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm).



**Cách giải:**

**a) Chứng minh tứ giác  $ABOC$  nội tiếp.**

Vì  $AB, AC$  là các tiếp tuyến của  $(O)$  lần lượt tại  $A, B$  nên  $\angle OBA = \angle OCA = 90^\circ$ .

Xét tứ giác  $ABOC$  có:  $\angle ABO + \angle ACO = 180^\circ$ , suy ra tứ giác  $ABOC$  nội tiếp (dnhb).

**b) Từ  $A$  vẽ cát tuyến  $AEF$  đến đường tròn  $(O)$  (với  $AE < AF$ ). Chứng minh  $AC^2 = AE \cdot AF$ .**

Xét tam giác  $AEC$  và tam giác  $ACF$  có:  $\angle EAC = \angle FAC$ ;  $\angle ACE = \angle CFA$  (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cùng chắn cung  $CE$ ).

$$\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle ACF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{FA} \text{ (2 cạnh tương ứng).}$$

$$\Rightarrow AC^2 = AE \cdot AF \text{ (đpcm).}$$

**c)  $OA$  cắt  $BC$  tại  $H$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $HB$ , tia  $OM$  cắt  $AB$  tại  $K$ . Đặt  $\angle AOB = \alpha$ .**

**Chứng minh  $\cos^2 \alpha = \frac{KB}{KA}$ .**

Gọi  $N$  là trung điểm của  $AH$ .

Kẻ đường thẳng vuông góc với  $AB$  cắt  $BN$  tại  $P$ .

Xét  $\triangle BAH$  và  $\triangle OBH$  có:

$$\angle BHA = \angle OHB = 90^\circ;$$

$$\angle ABH = \angle BOH \text{ (cùng phụ với } \angle OBH)$$

$$\Rightarrow \triangle BAH \sim \triangle OBH \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BA}{AH} = \frac{OB}{BH} \Rightarrow \frac{BA}{2AN} = \frac{OB}{2BM} \Rightarrow \frac{BA}{AN} = \frac{OB}{BM}.$$

Xét  $\triangle BAN$  và  $\triangle OBM$  có:  $\frac{BA}{AN} = \frac{OB}{BM}$  (cmt),  $\angle BAN = \angle OBM$  (cùng phụ với  $\angle BOA$ ).

$$\Rightarrow \Delta BAN \sim \Delta OBM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle ABN = \angle BOM \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

$$\Rightarrow \Delta BAP \sim \Delta OBK \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{AP}{BK} \Rightarrow BK \cdot AB = AP \cdot OB \Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{AP \cdot OB}{AB^2}$$

$$\text{Vì } AP \parallel OB \Rightarrow \frac{AP}{OB} = \frac{AN}{NO} \text{ (định lí Ta-lét)} \Rightarrow AP \cdot OB = \frac{AN}{NO} \cdot OB^2$$

$$\Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{AN \cdot OB^2}{NO \cdot AB^2}$$

Lại có  $OB^2 = OH \cdot OA$ ,  $AB^2 = AH \cdot AO$  (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$$\Rightarrow \frac{BK}{AB} = \frac{AN \cdot OH}{NO \cdot AH} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot OH}{NO \cdot AH} = \frac{OH}{2NO}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BK} = \frac{2NO}{OH} \Rightarrow \frac{AB - BK}{BK} = \frac{2NO - OH}{OH}$$

$$\Rightarrow \frac{AK}{BK} = \frac{2(NH + OH) - OH}{OH} = \frac{2NH + OH}{OH}$$

$$\Rightarrow \frac{AK}{BK} = \frac{AH + OH}{OH} = \frac{AO}{OH}$$

$$\Rightarrow \frac{KB}{KA} = \frac{OH}{OA}$$

$$\text{Lại có } \frac{OH}{OA} = \frac{OH \cdot OA}{OA^2} = \frac{OB^2}{OA^2} = \cos^2 \alpha$$

$$\text{Vậy } \frac{KB}{KA} = \cos^2 \alpha \text{ (đpcm).}$$

### Bài 7 (0,5 điểm)

**Cách giải:**

Ba bạn Đào, Mai, Trúc mặc ba chiếc áo màu trắng, hồng, xanh và đeo ba cái khẩu trang cũng màu trắng, hồng, xanh. Biết rằng:

a) Trúc đeo khẩu trang màu xanh.

b) Chỉ có bạn Đào là có màu áo và màu khẩu trang giống nhau.

c) Màu áo và màu khẩu trang của bạn Mai đều không phải màu trắng.

Dựa vào các thông tin trên, em hãy cho biết mỗi bạn Đào, Mai, Trúc mặc áo màu gì và đeo khẩu trang màu gì ?

Vì chỉ có bạn Đào là có màu áo và màu khẩu trang giống nhau nên bạn Trúc đeo khẩu trang khác màu áo.

⇒ Trúc mặc áo màu trắng hoặc hồng.

+) Nếu Trúc mặc áo màu hồng thì Mai mặc áo màu xanh (do Màu áo và màu khẩu trang của bạn Mai đều không phải màu trắng) và đeo khẩu trang màu hồng.

⇒ Đào mặc áo trắng và đeo khẩu trang màu trắng.

+) Nếu Trúc mặc áo màu trắng ⇒ Đào mặc áo và đeo khẩu trang màu hồng.

⇒ Mai mặc áo xanh và đeo khẩu trang màu trắng (vô lí).

Vậy:

Trúc: Áo hồng + khẩu trang xanh.

Đào: Áo trắng + khẩu trang trắng.

Mai: Áo xanh + khẩu trang hồng.

-----HẾT-----