

Giải bài tập Toán lớp 11: Giới hạn của dãy số, nội dung tài liệu gồm 8 bài tập trang 121, 122 SGK kèm theo lời giải chi tiết sẽ là nguồn thông tin hữu ích để giúp các bạn học sinh có kết quả cao hơn trong học tập.

Giải bài 1 trang 121 SGK đại số lớp 11

Có 1kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe con người (T được gọi chu kỳ bán rã).

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n .

- Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n)
- Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.
- Từ kết quả câu b, chứng tỏ sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với khỏe con người, cho biết chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Hướng dẫn giải

Áp dụng kiến thức: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$

Lời giải:

a. Sau khi bán rã thứ nhất, khối lượng chất phóng xạ là $u_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ kg

Sau chu kì bán rã thứ 2 khối lượng chất phóng xạ là: $u_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ kg

...

Sau chu kì bán rã thứ n thì khối lượng chất phóng xạ là: $u_n = \frac{1}{2^n}$ kg

b. $\lim u_n = \lim \frac{1}{2^n} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ vì $0 < \frac{1}{2} < 1$

c. Chất phóng xạ không còn độc hại nữa khi khối lượng chất phóng xạ còn lại nhỏ hơn $10^{-6}g = 10^{-9}kg$

$$\Leftrightarrow u_n < 10^{-9} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-9} \Leftrightarrow 2^n > 10^9 \Leftrightarrow n \geq 30$$

Vậy sau 30 chu kì bằng $30 \times 24.000 = 720.000$ năm thì chất phóng xạ không còn độc hại.

Giải bài 2 đại số lớp 11 trang 121 SGK

Tìm dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3}, \forall n > 0$

Chứng minh rằng: $\lim u_n = 1$

Hướng dẫn giải

Nhắc lại định nghĩa: $\lim u_n = 0$ nếu có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi

Lời giải:

Cho $d > 0$ tùy ý:

Ta chọn số tự nhiên n_0 sao cho $\frac{1}{n_0^3} < d$

Ta có: $n_0^3 > \frac{1}{d} \Leftrightarrow n_0 > \sqrt[3]{\frac{1}{d}}$

Khi đó thì với mỗi số hạng u_n của dãy số (u_n) mà $n \geq n_0$ ta đều có

$$|u_n - 1| < \frac{1}{n_0^3} < d$$

Theo định nghĩa thì $\lim (u_n - 1) = 0$ hay $\lim (u_n) = 1$

Giải bài 3 đại số trang 121 SGK lớp 11

Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \frac{6n - 2}{3n + 2}$

b. $\lim \frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1}$

c. $\lim \frac{3^n + 5 \cdot 4^n}{4^n + 2^n}$

d. $\lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$

Hướng dẫn giải

Xem xét bậc cao nhất của tử và mẫu thức. Sau đó chia cả tử và mẫu cho bậc cao nhất của đã xét, hoặc cũng có thể đặt nhân tử cao nhất của cả tử và mẫu để được những giới hạn cơ bản.

Nhận xét: Nếu bậc của tử lớn hơn bậc của mẫu thì giới hạn đó bằng $\pm\infty$

Nếu bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu thì giới hạn bằng 0.

Nếu bậc của tử bằng bậc của mẫu thì giới hạn đó bằng hệ số bậc cao nhất của tử trên hệ số bậc cao nhất của mẫu.

Ta áp dụng nhận xét này để giải nhanh các bài toán trắc nghiệm.

Lời giải:

Lời giải:

$$a. \lim \frac{6n - 2}{3n + 2} = \lim \frac{n \left(6 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(3 + \frac{2}{n} \right)} = \lim \frac{6 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{6 - 0}{3 + 0} = 2$$

$$b. \lim \frac{3n^2 + n - 5}{2n^2 + 1} = \lim \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}$$

$$c. \lim \frac{3^n + 5 \cdot 4^n}{4^n + 2^n} = \lim \frac{4^n \left(\frac{3^n}{4^n} + 5 \right)}{4^n \left(1 + \frac{2^n}{4^n} \right)} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4} \right)^n + 5}{1 + \frac{2^n}{4^n}}$$

$$= \frac{\lim \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n \right) + \lim 5}{\lim 1 + \lim \left(\frac{2^n}{4^n} \right)} = \frac{0 + 5}{1 + 0} = 5$$

$$d. \lim \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} = \lim \frac{n \sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{n \left(4 - \frac{2}{n} \right)} = \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{3}{4}$$

Giải bài 4 lớp 11 đại số trang 122 SGK

Đề trang hoàng cho căn hộ của mình, chú chuột mickey quyết định tô màu một miếng bài hình vuông cạnh bằng 1, nó tô màu xám các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3, ..., n, ..., trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó. (hình dưới). Giả sử quy trình tô màu của Mickey có thể diễn ra vô hạn.

a. Gọi u_n là diện tích hình vuông màu xám thứ n. Tính u_1, u_2, u_3 và u_n

b. Tính $\lim S_n$ với $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

Hướng dẫn giải

Số hạng thứ n của cấp số nhân được tính bằng công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ trong đó n là số nguyên thỏa mãn $n \geq 1$

- Công bội khi đó là: $q = \left(\frac{u_n}{u_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ hoặc $q = \sqrt[n-1]{\frac{u_n}{u_1}}$ trong đó n là số nguyên thỏa mãn $n \geq 1$

Áp dụng kiến thức: $\lim_{x \rightarrow \infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$

Lời giải:

a. $u_1 = \frac{1}{4}, u_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^2}, \dots, u_n = \frac{1}{4^n}$

b. $\lim S_n = \lim \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

Giải bài 5 lớp 11 đại số trang 122 sách giáo khoa

Tính tổng: $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots$

Hướng dẫn giải

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn và có tổng $S = \frac{u_1}{1 - q}$

Lời giải:

Ta có, dãy số $-1; 1/10; 1/10^2 \dots; (1-n^2)/10^{n-1}$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = -1$ và công bội $q = -1/10$.

Tổng của cấp số nhân đó là:

$S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots = \frac{-1}{1 + \frac{1}{10}} = \frac{-10}{11}$

Giải bài 6 sách giáo khoa lớp 11 đại số trang 122

Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 1,020\ 202\dots$ (chu kì là 02). Hãy viết a dưới dạng một phân số:

Hướng dẫn giải

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn và có tổng $S = \frac{u_1}{1 - q}$

Lời giải:

$$a = 1,020202\dots = 1 + \frac{2}{100} + \frac{2}{10000} + \frac{2}{1000000} + \dots$$

$$= 1 + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^4} + \frac{2}{10^6} + \dots = 1 + \frac{\frac{2}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 1 + \frac{2}{99} = \frac{101}{99}$$

Giải bài 7 sách giáo khoa đại số lớp 11 trang 122

Tính các giới hạn sau:

- a. $\lim (n^3 + 2n^2 - n + 1)$
- b. $\lim (-n^2 + 5n - 2)$
- c. $\lim (\sqrt{n^2 - n} - n)$
- d. $\lim (\sqrt{n^2 - n} + n)$

Hướng dẫn giải

Nếu dãy số có chứa căn thức mà không có dạng hữu tỉ để xét bậc ta nhân thêm lượng liên hợp để tính giới hạn.

+ Liên hợp bậc hai: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

+ Liên hợp bậc 3:

- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Lời giải:

$$a. \quad \lim (n^3 + 2n^2 - n + 1) = \lim n^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$$

$$= \lim n^3 \cdot \lim \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$b. \quad \lim (-n^2 + 5n - 2) = \lim [(-1) \cdot n^2 \cdot \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)]$$

$$= \lim (-1) \cdot \lim n^2 \cdot \lim \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = -\infty$$

$$c. \quad \lim (\sqrt{n^2 - n} - n) = \lim \frac{(\sqrt{n^2 - n} - n)(\sqrt{n^2 - n} + n)}{(\sqrt{n^2 - n} + n)}$$

$$= \lim \frac{(n^2 - n - n^2)}{(\sqrt{n^2 - n} + n)} = \lim \frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n} = \lim \frac{-n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = -\frac{1}{2}$$

d. Ta có:

$$\lim (\sqrt{n^2 - n} + n)$$

$$= \lim \left(n \sqrt{1 - \frac{1}{n}} + n\right) = \lim n \cdot \lim \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1\right) = +\infty \cdot 2 = +\infty$$

Giải bài 8 đại số sách giáo khoa lớp 11 trang 122

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) . Biết $\lim u_n = 3$, $\lim v_n = +\infty$. Tính các giới hạn:

$$a. \quad \lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$$

$$b. \quad \lim \frac{v_n + 2}{v_n^2 - 1}$$

Lời giải:

$$a. \quad \lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{\lim(3u_n - 1)}{\lim(u_n + 1)} = \frac{\lim 3u_n - \lim 1}{\lim u_n + \lim 1} = \frac{9 - 1}{3 + 1} = 2$$

$$b. \quad \lim \frac{v_n + 2}{v_n^2 - 1} = \lim \frac{v_n \left(1 + \frac{2}{v_n}\right)}{v_n \left(v_n - \frac{1}{v_n}\right)} = \frac{\lim \left(1 + \frac{2}{v_n}\right)}{\lim \left(v_n - \frac{1}{v_n}\right)}$$

$$= \frac{\lim 1 + \lim \frac{2}{v_n}}{\lim v_n - \lim \frac{1}{v_n}} = 0.$$

CLICK NGAY vào **TẢI VỀ** dưới đây để download hướng dẫn giải bài Toán lớp 11 SGK tập 1 trang 121, 122 file word, pdf hoàn toàn miễn phí.