Câu 1 (2,0 điểm):

Cách giải:

Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A=\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$

$A=\sqrt{8}-\sqrt{32}+\sqrt{50}$

$A=\sqrt{2^2.2}-\sqrt{4^2.2}+\sqrt{5^2.2}$

$A=2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+5\sqrt{2}$

$A=(2-4+5)\sqrt{2}$

$A=3\sqrt{2}$

Vậy $A=5\sqrt{2}$.

b) $B=\left(3+\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right).\left(3-\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$ (với $a\ge 0,\ a\ne 1$).

Với $a\ge 0,\ a\ne 1$ ta có:

$B=\left(3+\dfrac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\right).\left(3-\dfrac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right)$

$B=\left(3+\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}+1}\right).\left(3-\dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}{\sqrt{a}-1}\right)$

$B=\left(3+\sqrt{a}\right).\left(3-\sqrt{a}\right)$

$B=9-a$

Vậy với $a\ge 0,\ a\ne 1$ thì $B=9-a$.

Câu 2 (1,5 điểm):

Cách giải:

a) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=(m-1)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Để hàm số $y=(m-1)x+2$ ***đồng biến trên*** $\mathbb{R}$ thì $m-1>0\Leftrightarrow m>1$.

Vậy hàm số $y=(m-1)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m>1$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x+2y=8\\3x-4y=2\end{cases}$

Ta có: $\begin{cases}3x+2y=8\\3x-4y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6y=6\\3x+2y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\3x+2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=2\end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)=(2;1)$.

Câu 3 (2,0 điểm):

Cách giải:

Cho phương trình $x^2-6x+m+4=0$ (1) (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m=1$.

Với $m=1$ thì (1) trở thành $x^2-6x+5=0$.

Ta có $a+b+c=1-6+5=0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=5 \end{array}\right.$.

Vậy khi $m=1$ thì tập nghiệm của phương trình là $S=\{1;5\}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $2020(x_1+x_2)-2021x_1x_2=2014$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2 \Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 9-m-4>0 \Leftrightarrow 5-m>0 \Leftrightarrow m<5$.

Khi đó áp dụng hệ thức Vi- ét ta có $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=6 \\ x_1x_2=m+4 \end{array}\right.$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
& 2020(x_1+x_2)-2021x_1x_2=2014 \\
\Leftrightarrow\ & 2020.6-2021.(m+4)=2014 \\
\Leftrightarrow\ & 12120-2021m-8084=2014 \\
\Leftrightarrow\ & 2021m=2022 \\
\Leftrightarrow\ & m=\frac{2022}{2021}\ (tm)
\end{aligned}$$

Vậy $m=\frac{2022}{2021}$.

Câu 4 (1,0 điểm):

Cách giải:

Cho $a,\ b$ là các số thực dương. Chứng minh $\frac{a+b}{\sqrt{a(15a+b)}+\sqrt{b(15b+a)}} \ge \frac{1}{4}$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

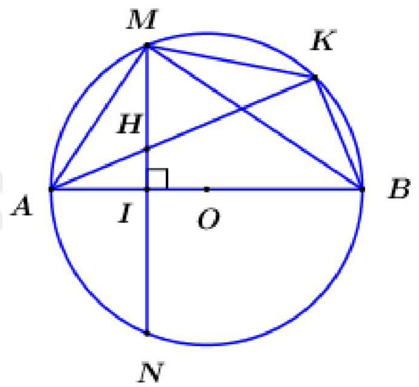
$$\begin{aligned}
& \sqrt{16a(15a+b)} \le \frac{16a+15a+b}{2}=\frac{31a+b}{2} \\
& \sqrt{16b(15b+a)} \le \frac{16b+15b+a}{2}=\frac{31b+a}{2} \\
& \Rightarrow \sqrt{16a(15a+b)}+\sqrt{16b(15b+a)} \le \frac{31a+b+31b+a}{2}=16(a+b) \\
& \Rightarrow \sqrt{a(15a+b)}+\sqrt{b(15b+a)} \le 4(a+b) \\
& \Rightarrow \frac{a+b}{\sqrt{a(15a+b)}+\sqrt{b(15b+a)}} \ge \frac{1}{4}\ (dpcm)
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l} 16a=15a+b \\ 16b=15b+a \end{array}\right. \Leftrightarrow a=b$.

Câu 5 (3,5 điểm):

Cách giải:

Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB, dây cung MN vuông góc với AB tại I sao cho $AI < BI$. Trên đoạn thẳng MI lấy điểm H (H khác M và I), tia AH cắt đường tròn $(O;R)$ tại điểm thứ hai là K. Chứng minh rằng:



a) Tứ giác $BIHK$ nội tiếp đường tròn.

Ta có $\angle AKB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle BKH = 90^0$.

Xét tứ giác $BIHK$ có: $\angle BIH + \angle BKH = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên $BIHK$ là tứ giác nội tiếp (dhnb).

b) ΔAHM đồng dạng với ΔAMK.

Ta có: $\angle AMB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$\Rightarrow \angle AMH + \angle BMH = 90^0 \Rightarrow \angle AMH + \angle ABM = 90^0$.

Lại có $\angle ABM = \angle AKM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AM) $\Rightarrow \angle AMH = \angle AKM$.

Xét ΔAHM và ΔAMK có: $\begin{cases} \angle MAK \ chung \\ \angle AMH = \angle AKM \ (cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta AHM \sim \Delta AMK \ (g.g)$.

c) $AH.AK + BI.AB = 4R^2$.

Vì $\Delta AHM \sim \Delta AMK \ (cmt) \Rightarrow \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{AM}{AK}$ (2 cạnh tương ứng) $\Rightarrow AH.AK = AM^2$.

Xét tam giác vuông ABM có đường cao MI ta có: $BI.BA = BM^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

$\Rightarrow AH.AK + BI.AB = AM^2 + BM^2$.

Mà ΔABM vuông tại M (cmt) nên áp dụng định lí Pytago ta có $AM^2 + BM^2 = AB^2 = (2R)^2 = 4R^2$.

Vậy $AH.AK + BI.AB = 4R^2$ (đpcm).

---------HẾT ---------