

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{49} - \sqrt{25}$$

$$B = \sqrt{5} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}$$

2. Cho biểu thức: $P = \frac{x-4}{\sqrt{x+2}} + \frac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị của x để $P = 5$.

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Cho parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 1$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

2. Không sử dụng máy tính, giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

Câu 3. (2,5 điểm)

1. Cho phương trình $x^2 + (m-2)x - 8 = 0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 4$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho biểu thức

$Q = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

2. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc để đi từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120 km. Vận tốc ô tô thứ hai lớn hơn vận tốc ô tô thứ nhất là 10 km/h nên ô tô thứ hai đến B trước ô tô thứ nhất 24 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và đường trung tuyến AM . Biết $AB = 9\text{cm}$; $AC = 12\text{cm}$. Hãy tính BC , AH , AM và diện tích tam giác ABM .

Câu 5. (2,5 điểm)

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). Kẻ cát tuyến AEF không đi qua tâm O (E nằm giữa A và F ; O và B nằm về hai phía so với cát tuyến AEF). Gọi K là trung điểm của EF .

a) Chứng minh tứ giác $OBAC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh KA là phân giác của \widehat{BKC} .

c) Kẻ dây ED vuông góc OB sao cho ED cắt BC tại M . Chứng minh FM đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB .

..... HẾT

Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1 (2,0 điểm):

Cách giải:

1. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$A = \sqrt{49} - \sqrt{25}$$

$$A = \sqrt{7^2} - \sqrt{5^2}$$

$$A = 7 - 5 = 2$$

Vậy $A = 2$.

$$B = \sqrt{5} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2}$$

$$B = \sqrt{5} + |3 - \sqrt{5}|$$

$$B = \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} \quad (\text{Do } 3 - \sqrt{5} > 0)$$

$$B = 3$$

Vậy $B = 3$.

2. Cho biểu thức $P = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} + \frac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

a. Rút gọn biểu thức P .

Với $x > 0$ ta có:

$$P = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} + \frac{x+3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}}$$

$$P = \sqrt{x} - 2 + \sqrt{x} + 3$$

$$P = 2\sqrt{x} + 1$$

Vậy với $x > 0$ thì $P = 2\sqrt{x} + 1$.

b. Tìm giá trị của x để $P = 5$.

$$\text{Đề } P = 5 \text{ thì } 2\sqrt{x} + 1 = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (tm).}$$

Vậy đề $P = 5$ thì $x = 4$.

Câu 2 (2,0 điểm):

Cách giải:

1. Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + 1$.

a) Vẽ parabol (P) và đường thẳng d trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy .

+) Parabol (P) : $y = 2x^2$ có bề lõm hướng lên và nhận Oy làm trục đối xứng.

Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

⇒ Parabol (P) : $y = 2x^2$ là đường cong đi qua các điểm $(-2;8)$, $(-1;2)$, $(0;0)$, $(1;2)$, $(2;8)$.

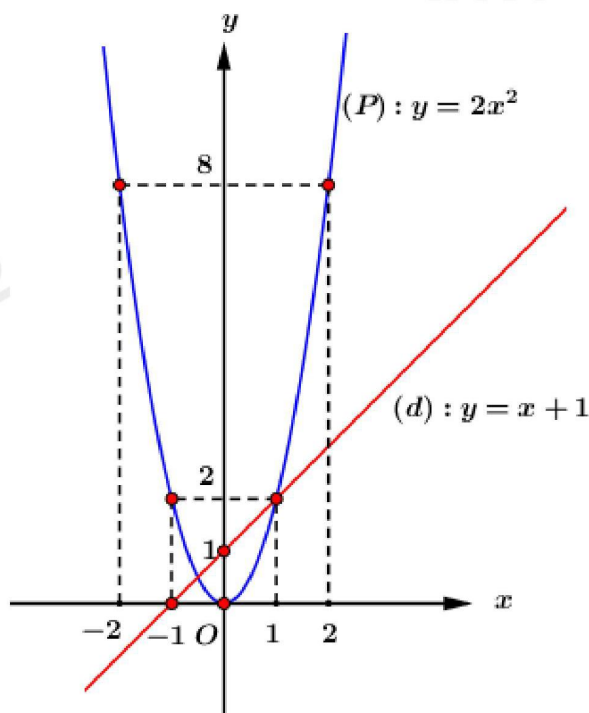
+) Đường thẳng (d) : $y = x + 1$

Ta có bảng giá trị sau:

x	0	-1
$(d): y = x + 1$	1	0

⇒ Đường thẳng (d) : $y = x + 1$ đi qua các điểm $(0;1)$; $(-1;0)$.

Đồ thị Parabol (P) : $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy :



b) Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) bằng phép tính.

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình $2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$.

Ta có $a+b+c=2-1-1=0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

+ Với $x=1 \Rightarrow y=1+1=2$.

+ Với $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(1;2)$ và $(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

2. Không sử dụng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 15 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (3; 2)$.

Câu 3 (2,5 điểm):

Cách giải:

1. Cho phương trình $x^2 + (m-2)x - 8 = 0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = 4$.

Thay $m = 4$ vào phương trình (1) ta được: $x^2 + 2x - 8 = 0$

Ta có: $\Delta' = 1 + 8 = 9 = 3^2 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:
$$\begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{9} = 2 \\ x_2 = -1 - \sqrt{9} = -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-4; 2\}$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $Q = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$ đạt giá trị lớn nhất.

Phương trình (1) có: $\Delta = (m-2)^2 + 32 > 0 \forall m$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Khi đó theo Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = -8 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 Q &= (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) \\
 &= x_1^2 x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 \\
 &= x_1^2 x_2^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2 + 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q = 64 - (-m + 2)^2 - 16 + 1 = -(-m + 2)^2 + 49 \leq 49 \quad \forall m.$$

Vậy $Q_{\max} = 49$. Dấu “=” xảy ra khi $m = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của Q bằng 49 khi $m = 2$.

2. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc để đi từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120 km. Vận tốc ô tô thứ hai lớn hơn vận tốc ô tô thứ nhất là 10 km/h nên ô tô thứ hai đến B trước ô tô thứ nhất 24 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất là x (km/h) (ĐK: $x > 0$).

Suy ra vận tốc của ô tô thứ hai là $x + 10$ (km/h)

Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là: $\frac{120}{x}$ (h)

Thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB là $\frac{120}{x + 10}$ (h)

Vì ô tô thứ hai đến B trước ô tô thứ nhất 24 phút = $\frac{2}{5}$ giờ nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned}
 \frac{120}{x} - \frac{120}{x + 10} &= \frac{2}{5} \\
 \Leftrightarrow 600(x + 10) - 600x &= 2x(x + 10) \\
 \Leftrightarrow 600x + 6000 - 600x &= 2x^2 + 20x \\
 \Leftrightarrow 2x^2 + 20x - 6000 &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 3000 &= 0
 \end{aligned}$$

Ta có: $\Delta' = (-5)^2 + 3000 = 3025 = 55^2 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x_1 = -5 + 55 = 50 \quad (tm) \\ x_2 = -5 - 55 = -60 \quad (ktm) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất là 50 km/h và vận tốc của ô tô thứ hai là 60 km/h.

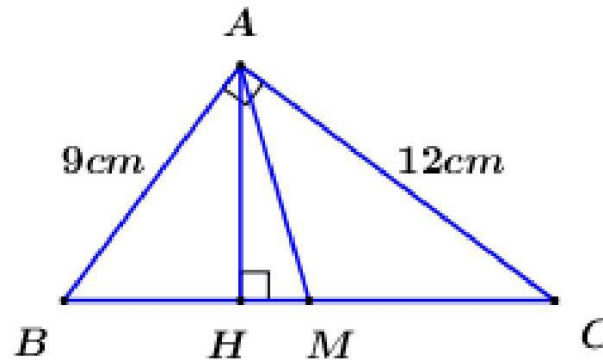
Vì AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông ABC nên $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7,5 \text{ (cm)}$
(định lí đường trung tuyến trong tam giác vuông).

Vậy $BC = 15 \text{ cm}$, $AH = 7,2 \text{ cm}$, $AM = 7,5 \text{ cm}$.

Câu 4 (1,0 điểm):

Cách giải:

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH và đường trung tuyến AM . Biết $AB = 9 \text{ cm}$, $AC = 12 \text{ cm}$. Hãy tính BC , AH , AM và diện tích tam giác ABM .



Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABC ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ \Rightarrow BC^2 &= 9^2 + 12^2 \\ \Rightarrow BC^2 &= 225 \\ \Rightarrow BC &= \sqrt{225} = 15 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

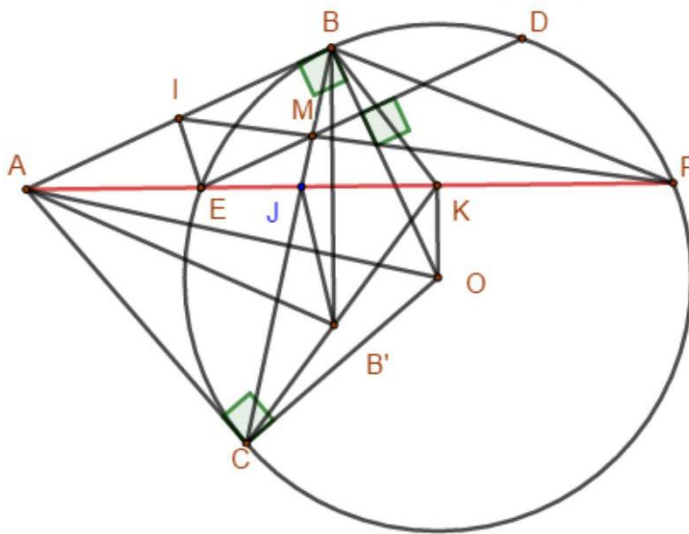
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC ta có:

$$AB \cdot AC = AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{9 \cdot 12}{15} = 7,2 \text{ (cm)}.$$

Câu 5 (2,5 điểm):

Cách giải:

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là tiếp điểm). Kẻ cát tuyến AEF không đi qua tâm (E nằm giữa A và F ; O và B nằm về hai phía so với cát tuyến). Gọi K là trung điểm của EF .



a) Chứng minh tứ giác $OBAC$ nội tiếp đường tròn.

Ta có: AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn nên $\begin{cases} OA \perp AB \\ OC \perp AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle ABO = 90^\circ \\ \angle ACO = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle ABO + \angle ACO = 180^\circ$

$\Rightarrow OBAC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AO (đhnb).

b) Chứng minh KA là phân giác của $\angle BKC$.

Vì AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn nên $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

Ta có K là trung điểm của EF nên $OK \perp AK$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung).

$\Rightarrow \angle OKA = 90^\circ \Rightarrow K$ thuộc đường tròn đường kính AO hay 5 điểm O, K, B, A, C cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow \angle BKA = \angle AKC = \frac{1}{2} sd AB = \frac{1}{2} sd AC$ (góc chắn hai cung bằng nhau)

Vậy KA là phân giác của $\angle BKC$.

c) Kẻ dây ED vuông góc OB sao cho ED cắt BC tại M . Chứng minh FM đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB .

Gọi J là giao điểm của AK và BC

Gọi I là giao điểm của FM và AB . Ta sẽ chứng minh I là trung điểm của AB .

Xét tam giác ABJ và AKB ta có:

$\angle BAK$ chung

$\angle ABJ = \angle BKA (= \angle ACB)$

$\Rightarrow \triangle ABJ$ đồng dạng với $\triangle AKB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AJ}{AB} = \frac{AB}{AK}$ (cặp cạnh tương ứng) $\Rightarrow AB^2 = AJ \cdot AK$

Tương tự ta có: $\triangle ABE$ đồng dạng với $\triangle AFB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AE \cdot AF$

$\Rightarrow AJ \cdot AK = AE \cdot AF \Rightarrow \frac{AF}{AJ} = \frac{AK}{AE} = \frac{AF - AK}{AJ - AE} = \frac{FK}{EJ} = \frac{EK}{EJ}$ (Vì K là trung điểm của EF) $\Rightarrow \frac{AF}{EK} = \frac{AJ}{EJ}$.

Ta lại có: $\begin{cases} EM \perp OB \text{ (gt)} \\ OB \perp AB \text{ (gt)} \end{cases} \Rightarrow EM \parallel AB \Rightarrow \begin{cases} \frac{AB}{EM} = \frac{AJ}{EJ} \\ \frac{AI}{EM} = \frac{AF}{EF} \end{cases}$ (Định lí Ta-lét)

$\Rightarrow \frac{AI}{EM} = \frac{AF}{2EK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AJ}{EJ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{EM} \Rightarrow AI = \frac{AB}{2}$.

Vậy I là trung điểm của AB (đpcm).