

Bài I (2 điểm): Với $x > 0; x \neq 1$, có $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{3\sqrt{x+4}}{x+2\sqrt{x}}$ và $A = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-1}}$

- 1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 16$.
- 2) Rút gọn biểu thức B.
- 3) Tìm các giá trị nguyên x để $\frac{2A}{B}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài II (2.5 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Để hưởng ứng phong trào phòng chống COVID -19, một chi đoàn thanh niên dự định làm 600 chiếc mũ ngăn giọt bắn trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất lao động mỗi giờ chi đoàn đó làm được nhiều hơn so với kế hoạch là 30 chiếc nên công việc hoàn thành sớm hơn quy định 1 giờ. Hỏi theo kế hoạch 1 giờ chi đoàn đó phải làm bao nhiêu chiếc mũ ngăn giọt bắn?

2) Để làm một vỏ hộp đựng sữa bột đúng tiêu chuẩn loại 850 gam, nhà sản xuất làm vỏ hộp hình trụ có đường kính đáy là 12 cm, chiều cao của hộp là 15 cm. Hãy tính diện tích vật liệu dùng để làm vỏ hộp sữa bột nêu trên (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2), biết phần ghép nối không đáng kể.

Bài III (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \frac{2}{y} = 5 \\ -2\sqrt{x-1} + \frac{3}{y} = 4 \end{cases}$$

2) Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 2 = 0$ (x là ẩn)

- a) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m.
- b) Tìm m để $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 \leq -1$.

Bài IV (3 điểm): Cho đường tròn (O, R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Điểm M bất kỳ trên cung nhỏ BC (M khác B và C). Đường thẳng AM cắt đường kính CD tại E. Hạ CH vuông góc với AM tại H.

- 1) Chứng minh tứ giác AOHC nội tiếp.
- 2) Chứng minh OH//DM.
- 3) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME nằm trên đường thẳng cố định khi M di chuyển trên cung nhỏ BC.

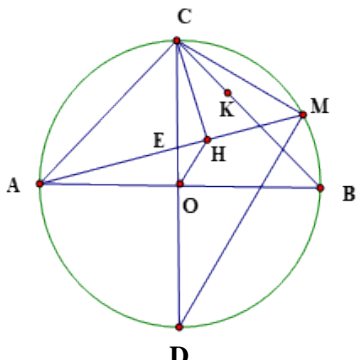
Bài V (0.5 điểm): Cho hai số dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức:
$$P = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2}$$

---Hết---

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
Bài I 2,0 điểm	1)	Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$ khi $x = 16$	0,5
		Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}-1}$	0,25
		Tính được $A = \frac{7}{3}$	0,25
	2)	Với $x > 0; x \neq 1$, rút gọn $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{3\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}}$	1,0
		$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{3\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}}$ $= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$	0,25
		$= \frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$	0,25
		$= \frac{x+5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$	0,25
		$= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$	0,25
	3)	Tính các giá trị nguyên x để $\frac{2A}{B}$ đạt giá trị lớn nhất	0,5
		$\frac{2A}{B} = \frac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 2 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ <p>Với $x > 0, x \neq 1$</p> <p>Với $x > 0, x \neq 1$ mà $x \in \mathbb{Z} \leftrightarrow x \geq 2$ thì $\frac{2A}{B} \leq 4$</p> <p>Dấu “=” xảy ra khi $x=2$ (tmdk)</p>	0,25
KL được $x=2$ thì $\frac{2A}{B}$ đạt giá trị lớn nhất là 4		0,25	
Bài II 2,5 điểm	1)	Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình	1,5
		Gọi số chiếc mũ mà chi đoàn đó làm trong 1 giờ theo kế hoạch là x (chiếc, $x \in \mathbb{N}^*$)	0,25

		Thời gian chi đoàn hoàn thành theo kế hoạch là: $\frac{600}{x}$ (giờ)	0,25
		Thực tế mỗi giờ chi đoàn đó làm được số chiếc mũ là: $x + 30$ (chiếc)	
		Thời gian chi đoàn hoàn thành theo kế hoạch là: $\frac{600}{x+30}$ (giờ)	0,25
		Vì chi đoàn hoàn thành sớm hơn so với dự định 1 giờ nên ta có phương trình: $\frac{600}{x} - \frac{600}{x+30} = 1$	0,25
		$\Leftrightarrow x^2 + 30x - 1800 = 0$	
		Giải phương trình tìm được: $x = -150; x=120$	0,25
		Đối chiếu với điều kiện của ẩn và kết luận chiếc mũ mà chi đoàn đó làm trong 1 giờ theo kế hoạch là 120 chiếc	0,25
		Hãy tính diện tích vật liệu dùng để làm vỏ hộp sữa bột	1
	2)	Diện tích vật liệu dùng để làm vỏ hộp sữa cũng là diện tích toàn phần của hình trụ có đường kính đáy 12 cm, chiều cao 15 cm $S_{tp} = S_{xq} + S_{2 \text{ đáy}}$ $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$	0,5
		$S_{tp} = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 15 + 2 \cdot \pi \cdot 36$ $S_{tp} = 252\pi \approx 252 \times 3.14$ $S_{tp} \approx 791,28(\text{cm}^2)$ Vậy diện tích vật liệu dùng để làm vỏ hộp sữa là $791,28\text{cm}^2$	0,5
		Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \frac{2}{y} = 5 \\ -2\sqrt{x-1} + \frac{3}{y} = 4 \end{cases}$	1,0
Bài III 2,5 điểm	1)	ĐKXĐ: $y \neq 0; x \geq 1$ Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-1} = a (a \geq 0) \\ \frac{1}{y} = b \end{cases}$ Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} a + 2b = 5 \\ -2a + 3b = 8 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b = 10 \\ -2a + 3b = 8 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 7b = 14 \\ a + 2b = 5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$	0,25

	Giải hệ phương trình trên ta được $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)	0,25
	Từ đó: $\begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ \frac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện xác định)	0,25
	Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = \left(2; \frac{1}{2}\right)$	0,25
	a) Tính được $\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4m + 8$ $\Delta = (m-2)^2 + 4 > 0$ với mọi m Kết luận: pT luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m	0,25 0,5đ 0,25
	b) Theo Viet có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases}$ $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 < -1 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2) \leq -1 \Leftrightarrow (m-1)^2 \leq 0$	0,5
	Nhận xét $(m-1)^2 \geq 0$ với mọi m nên để thỏa mãn đề bài thì m = 1 Kết luận m = 1 thỏa mãn đề bài	0,5đ
Bài IV 3,0 điểm	Chứng minh tứ giác AOHC nội tiếp.	1,0
	1) 	0,25
	Vẽ đúng hình đến ý a	
	CM: $\widehat{AOC} = 90^\circ$	0,25
	CM: $\widehat{AHC} = 90^\circ$	0,25
	Chứng minh tứ giác AOHC nội tiếp	0,25
	Chứng minh OH//DM.	1,0
	2) Chứng minh: $\widehat{CAH} = \widehat{COH}$	0,25
	Chứng minh: góc CDM = góc CAH \Rightarrow Góc COH = góc CDM mà hai góc ở vị trí đồng vị	0,25 0,25
	Kết luận OH//DM	
3) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME nằm trên đường thẳng cố định khi M di chuyển trên cung nhỏ BC	1	
-Goi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEM	0,5	

	<p>Trong đường tròn (O) có góc CMA = $\frac{1}{2}$ góc COA = 45°</p> <p>Trong đường tròn (K) có góc CME = $\frac{1}{2}$ góc CKE suy ra góc CKE = 90° mà KC = KE nên \triangleCKE vuông cân tại K \Rightarrow góc KCE = 45°</p>	
	<p>Ta có OB = OC và OB \perp OC nên \triangle OBC vuông cân tại O \Rightarrow góc OCB = 45°</p> <p>Do đó góc OCB = góc KCE $\Rightarrow K \in BC$</p> <p>Vậy K nằm trên đường thẳng BC cố định</p>	0,5
<p>Bài V 0,5 điểm</p>	<p>Cho hai số dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2}$</p>	0,5
	<p>$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = 2 \Rightarrow 2ab = a+b \geq 2\sqrt{ab} \rightarrow \begin{cases} ab \geq 1 \\ a+b \geq 2 \end{cases}$</p> <p>Áp dụng BĐDT cô si cho hai số dương ta có</p> <p>$a^4 + b^2 \geq 2\sqrt{a^4 b^2} \Rightarrow a^4 + b^2 + 2ab^2 \geq 2a^2 b + 2ab^2$</p> <p>$b^4 + a^2 \geq 2\sqrt{b^4 a^2} \Rightarrow b^4 + a^2 + 2a^2 b \geq 2ab^2 + 2a^2 b$</p> <p>$P = \frac{1}{a^4 + b^2 + 2ab^2} + \frac{1}{b^4 + a^2 + 2ba^2} \leq \frac{1}{2a^2 b + 2ab^2} + \frac{1}{2ab^2 + 2a^2 b} \leq \frac{1}{2}$</p>	0,25
	<p>Dấu bằng xảy ra khi a = b = 1</p> <p>Vậy GTLN của P là $\frac{1}{2}$ khi a = b = 1</p>	0,25

(Lưu ý học sinh làm đúng theo cách khác vẫn cho điểm tương đương)