HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT ĐỀ THI VÀO 10 MÔN TOÁN CHUYÊN – TỈNH HÀ TĨNH

THỰC HIỆN: BAN CHUYÊN MÔN TUYENSINH247.COM

Câu 1 (1,5 điểm).

Cách giải:

Cho a, b, c là các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:

$$A=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
A&=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}\\
&=\frac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+b^3-3b^2c+3bc^2-c^3+c^3-3c^2a+3ca^2-a^3}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}\\
&=\frac{-3a^2b+3ab^2-3b^2c+3bc^2-3c^2a+3ca^2}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}\\
&=\frac{-3a^2(b-c)-3b^2(c-a)-3c^2(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}\\
&=\frac{-3\left[a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\right]}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}\\
&=-3
\end{aligned}$$

Vậy $A=-3$.

Câu 2 (2,5 điểm):

Cách giải:

a) Giải phương trình $9x^2=(x^2+x-5)\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2$

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{-1}{3}$.

Ta có:

$$9x^2=\left(x^2+x-5\right)\left(\sqrt{3x+1}-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2=\left(x^2+x-5\right)\left[\frac{\left(\sqrt{3x+1}-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}{\sqrt{3x+1}+1}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-\left(x^2+x-5\right)\frac{9x^2}{\left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2}=0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2\left(1-\frac{x^2+x-5}{\left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 9x^2=0 & (1) \\ 1-\dfrac{x^2+x-5}{\left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2}=0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải $(1)\Leftrightarrow x=0\ \ (tm)$

Giải $(2)\Leftrightarrow 1-\dfrac{x^2+x-5}{\left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2}=0$

$$\Leftrightarrow x^2+x-5=\left(\sqrt{3x+1}+1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+x-5=3x+1+2\sqrt{3x+1}+1$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-7=2\sqrt{3x+1}$$

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\ (t\ge 0)\Rightarrow x=\dfrac{t^2-1}{3}$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\left(\frac{t^2-1}{3}\right)^2-2\frac{t^2-1}{3}-7-2t=0$$
$$\Leftrightarrow \left(t^2-1\right)^2-6\left(t^2-1\right)-9.7-18t=0$$
$$\Leftrightarrow t^4-2t^2+1-6t^2+6-63-18t=0$$
$$\Leftrightarrow t^4-8t^2-18t-56=0$$
$$\Leftrightarrow t^4-16t^2+8t^2-18t-56=0$$
$$\Leftrightarrow t^2(t-4)(t+4)+2(t-4)(4t+7)=0$$

$$\Leftrightarrow (t-4)\left(t^3+4t^2+8t+14\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4\ \ (tm) \\ t^3+4t^2+8t+14=0\ \ (vo\ nghiem)\ (do\ \ t\ge 0) \end{array}\right.$$

Với $t=4$ ta có $x=\dfrac{4^2-1}{3}=5\ (tm)$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;5\}$.

b. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+xy^2+2y^3=0 & (1) \\ \sqrt{2x^3-x}+8y^2+3y=4 & (2) \end{cases}$

ĐKXĐ: $2x^3-x\ge 0$.

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+2y^2)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x^2-xy+2y^2=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x^2-2x.\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{4}y^2+\dfrac{7}{4}y^2=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ \left(x-\dfrac{1}{2}y\right)^2+\dfrac{7}{4}y^2=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-y \\ x=y=0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy nghiệm $x=y=0$ không thỏa mãn (2).

Thay $x=-y$ vào (2) ta được:

$$\sqrt{2x^3-x}+8x^2-3x=4$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^3-x}=-(8x^2-3x-4)$$
$$\Leftrightarrow 2x^3-x=(8x^2-3x-4)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x^3-x=64x^4+9x^2+16-48x^3-64x^2+24x$$
$$\Leftrightarrow 64x^4-50x^3-55x^2+25x+16=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1)(32x^2-9x-16)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\quad (tm)\Rightarrow y=-1 \\ x=-\dfrac{1}{2}\ (tm)\Rightarrow y=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{9+\sqrt{2129}}{64}\ (tm)\Rightarrow y=-\dfrac{9+\sqrt{2129}}{64} \\ x=\dfrac{9-\sqrt{2129}}{64}\ (ktm) \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)\in\left\{(1;-1);\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(\frac{9+\sqrt{2129}}{64};-\frac{9+\sqrt{2129}}{64}\right)\right\}$.

Câu 3 (2,5 điểm):

Cách giải:

a) Tìm các số nguyên $m,\ n$ ***thỏa mãn*** $m(m+1)(m+2)=n^2$**.**

+ Nếu $m<-2$ thì $m(m+1)(m+2)<0\ \Rightarrow n^2<0$ (vô lý) $\Rightarrow m<-2$ không thỏa mãn.

+ Nếu $m=-2\Rightarrow n^2=0\Leftrightarrow n=0$.

$m=-1\Rightarrow n^2=0\Leftrightarrow n=0$.

$m=0\Rightarrow n^2=0\Leftrightarrow n=0$.

(thỏa mãn).

+ Nếu $m>0$,

TH1: Xét m lẻ, khi đó $m,\ m+1,\ m+2$ là 3 số đôi một nguyên tố cùng nhau.

$\Rightarrow m,\ m+1,\ m+2$ là 3 số chính phương.

Mà $m,\ m+1$ là 2 số nguyên dương liên tiếp $\Rightarrow$ Vô lý.

+ TH2: Xét m chẵn, đặt $m=2t\ \left(t\in\mathbb{N}^*\right)$.

$\Rightarrow 4t(2t+1)(t+1)=n^2\ \Rightarrow\ n$ chẵn.

Đặt $n=2x\Rightarrow t(2t+1)(t+1)=x^2$.

Có $t,\ 2t+1,\ t+1$ là 3 số đôi một nguyên tố cùng nhau

$\Rightarrow t,\ 2t+1,\ t+1$ là 3 số chính phương.

Mà t và $t+1$ là 2 số nguyên dương liên tiếp $\Rightarrow$ vô lí.

Vậy $(m;n)\in\left\{(-2;0);(-1;0);(0;0)\right\}$.

b) Cho $x,\ y$ ***là các số thực dương thỏa mãn*** $x+y+xy=3$***. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*** $P=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{9-y^2}+\frac{x+y}{4}$**.**

Ta có:

$$3=(x+y)+xy\le (x+y)+\frac{(x+y)^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2+4.(x+y)-12\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \left[(x+y)-2\right]\left[x+y+6\right]\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x+y\ge 2$$

Áp dụng BĐT $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le \sqrt{2(a+b)}$ ta có:

$$P\le \sqrt{2\left(9-x^2+9-y^2\right)}+\frac{x+y}{4}$$
$$P\le \sqrt{36-2\left(x^2+y^2\right)}+\frac{x+y}{4}$$

Ta lại có: $2\left(x^2+y^2\right)\ge (x+y)^2$

$$\Rightarrow P\le \sqrt{36-(x+y)^2}+\frac{x+y}{4}$$

Đặt $x+y=a$, với $a\ge 2$

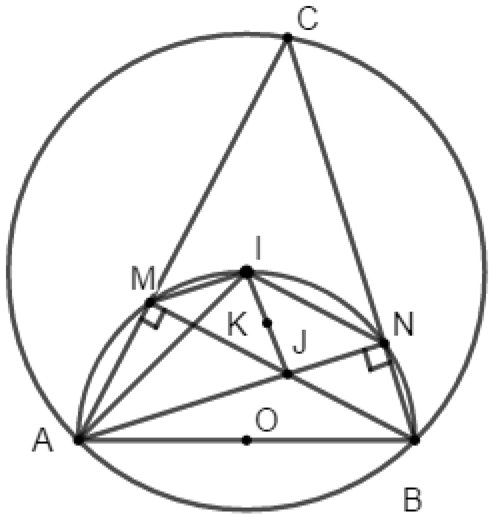
$$\Rightarrow P\le \frac{68-a^2}{8\sqrt{2}}+\frac{a}{2}$$
$$\Rightarrow P\le \frac{68-a^2+2\sqrt{2}a}{8\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow P\le \frac{68+4-(a-2)^2-\left(4-2\sqrt{2}\right)a}{8\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow P\le \frac{72-0-\left(4-2\sqrt{2}\right).2}{8\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow P\le \frac{1+8\sqrt{2}}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=y=1$.

Câu 4 (2,5 điểm).

Cách giải:

Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi I là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung lớn AB của đường tròn tâm I, bán kính IA lấy điểm C sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của CA, CB với nửa đường tròn đường kính AB (M khác A, N khác B); J là giao điểm của AN với BM.



a) Chứng minh ΔMBC và ΔNAC là các tam giác cân.

Ta có $\angle AMB = \angle ANB = \angle AIB = 90^0$ (các góc nội tiếp cùng chắn nửa đường tròn (O)).

Mà $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AIB \Rightarrow \angle ACB = 45^0$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AB).

ΔNAC vuông tại N có $\angle ACN = 45^0$ (cmt) nên ΔACN vuông cân tại N.

ΔMBC vuông tại M có $\angle MCB = 45^0$ (cmt) nên ΔMBC vuông cân tại M.

b) Chứng minh I là trực tâm của tam giác CMN.

Xét (O) ta có $\angle BMI = \angle BAI = 45^0$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BI).

Ta có

$\angle AMI = \angle AMB + \angle BMI = 90^0 + 45^0 = 135^0$

$\angle MAN = 45^0$ (do ΔNAC vuông cân tại M).

$\Rightarrow \angle AMI + \angle MAN = 135^0 + 45^0 = 180^0$.

Mà 2 góc này ở vị trí trong cùng phía bù nhau $\Rightarrow MI\,//\,AN$ (dhnb).

Mà $AN \perp CN$ nên $MI \perp CN$ (từ vuông góc đến song song).

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có $NI \perp CM$.

Mà $MI \cap NI = \{I\}$. Suy ra I là giao của hai đường cao trong tam giác CMN.

Vậy I là trực tâm của tam giác CMN.

c) Gọi K là trung điểm của IJ, tính tỉ số $\frac{CJ}{OK}$.

Ta có ΔMBC vuông cân tại M nên $MB = MC$.

Ta có: $\angle ABM = \angle ANM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AM của (O))

Tứ giác $JMCN$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)

$\Rightarrow \angle ANM = \angle JCM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MJ)

$\Rightarrow \angle ABM = \angle JCM$.

Xét ΔJCM và ΔABM có:

$\angle JMC = \angle AMB = 90^0$;
$\angle JCM = \angle ABM$ (cmt)
$CM = BM$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta JCM = \Delta ABM$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề).

$\Rightarrow CJ = AB$ (2 cạnh tương ứng).

Ta lại có: $\angle MON = 2\angle MAN = 90^0$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MN).

$\Rightarrow \Delta MON$ vuông cân tại O.

Ta có $MINJ$ là hình bình hành vì $MI // NJ$ và $IM // MJ$ nên K là trung điểm chung của IJ và MN.

$\Rightarrow KM = KN = \dfrac{1}{2}MN = KO \Rightarrow OK \perp MN$ (trong tam giác cân, trung tuyến đồng thời là đường cao).

Mà $KO^2 + KN^2 = ON^2$ (định lí Pytago)

$\Rightarrow OK = \dfrac{\sqrt{2}}{2}ON = \dfrac{\sqrt{2}}{4}AB = \dfrac{\sqrt{2}}{4}CJ$.

Vậy $\dfrac{OK}{CJ} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cách giải:

Cho tập hợp $X = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$***, chia tập hợp X thành 2 tập hợp khác rỗng và không có phần tử chung. Chứng minh rằng với mọi cách chia thì luôn tồn tại ba số*** a, b, c ***trong một tập hợp thỏa mãn*** $a + c = 2b$.

Nếu a, b, c là 3 số tự nhiên liên tiếp, hoặc 3 số chẵn liên tiếp, hoặc 3 số lẻ liên tiếp thì đều thỏa mãn $a + c = 2b$

Ngoài ra ta có các bộ số $(1;5;9)$, $(2;5;8)$ cũng thỏa mãn $a + c = 2b$.

Giả sử tồn tại cách chia tập hợp X thành 2 tập hợp A và B sao cho không tồn tại 3 số a, b, c trong một tập hợp và thỏa mãn $a + c = 2b$.

Giả sử tập hợp A chứa phần tử 5.

Thế thì 4 và 6 không đồng thời thuộc A.

* Nếu $4\in A$ và $6\in B$:

Vì $4,\ 5\in A\Rightarrow 3\in B$

$3;\ 6\in B\Rightarrow 9\in A$.

$3;\ 9\in A\Rightarrow 1;\ 7\in B$

Vậy $1;3;6;7\in B\ \Rightarrow 2;8\in A$.

* Nếu $4\in B$ và $6\in A$

$4;6\in A\Rightarrow 7\in B$
$4;7\in B\Rightarrow 1\in A$
$1;5\in A\Rightarrow 3\in B$
$1;5\in A\Rightarrow 9\in B$

Vậy $4,3,7,9\in B,\ 2;8\in A$.

* Nếu $4\in B$ và $6\in B$

$\Rightarrow 2\in A,\ 8\in A$

Vô lý vì $2+8=2.5$.

Vậy giả sử là sai.

Hoàn tất chứng minh.

- HẾT -