Câu 1 (2,0 điểm):

Cách giải:

a. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ ***với*** $x\ge 0,\ x\ne 1$***.***

Với $x\ge 0,\ x\ne 1$ ***ta có:***

$$A=\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}-\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$=\frac{x+2+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)-x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vậy $A=\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0,\ x\ne 1$.

b. Cho hai hàm số $y=2x^2$ ***và*** $y=4x+m$ ***(với*** m ***là tham số). Tìm các giá trị của tham số*** m ***để đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.***

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đồ thị ta được phương trình:

$$2x^2=4x+m\Leftrightarrow 2x^2-4x-m=0\quad (1)$$

Để đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 + 2m > 0 \\ S = \dfrac{4}{2} = 2 > 0 \ (luon\ dung) \\ P = \dfrac{-m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$.

Vậy $-2 < m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Để đồ thị của hai hàm số trên cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 + 2m > 0 \\ S = \dfrac{4}{2} = 2 > 0\ (luon\ dung) \\ P = \dfrac{-m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 0$.

Vậy $-2 < m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2 (2,5 điểm):

Cách giải:

a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x} = 3 + \sqrt{4x-8}$

Điều kiện xác định: $x \ge 2$

Ta có: $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x} = 3 + \sqrt{4x-8}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 3 + \sqrt{3x} - \sqrt{4x-8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x+1}-3\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{x+1}+3\right)} + \frac{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{4x-8}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{4x-8}\right)}{\sqrt{3x}+\sqrt{4x-8}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1-9}{\sqrt{x+1}+3} + \frac{3x-4x+8}{\sqrt{3x}+\sqrt{4x-8}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-8)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+3} - \frac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{4x-8}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-8=0 & (1) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+3} - \dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{4x-8}} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1) ta được $x = 8$ (thỏa mãn).

Giải $(2) \Leftrightarrow \sqrt{3x} + \sqrt{4x-8} = \sqrt{x+1} + 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x} - 3 + \sqrt{4x-8} - \sqrt{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-9}{\sqrt{3x}+3} + \frac{3x-9}{\sqrt{4x-8}+\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-9)\left(\frac{1}{\sqrt{3x}+3} + \frac{1}{\sqrt{4x-8}+\sqrt{x+1}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-9=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3x}+3} + \dfrac{1}{\sqrt{4x-8}+\sqrt{x+1}} = 0\ (vo\ nghiem) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x = 3\ (tm)$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3;8\}$.

b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2-2x+3xy=12 & (1) \\ y^2-2y-xy=-4 & (2) \end{cases}$

Cộng vế theo vế của 2 phương trình $(1),(2)$ ta được

$$x^2+y^2-2x-2y+2xy+1=9$$
$$\Leftrightarrow (x+y-1)^2=9$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-1=3 \\ x+y-1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4-y \\ x=-2-y \end{array}\right.$$

TH1: Với $x=4-y$, thế vào phương trình (2) ta được:

$$y^2-2y-(4-y)y=-4$$
$$\Leftrightarrow y^2-2y-4y+y^2+4=0$$
$$\Leftrightarrow 2y^2-6y+4=0$$
$$\Leftrightarrow y^2-3y+2=0$$
$$\Leftrightarrow (y-2)(y-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=1 \end{array}\right.$$

Với $y=2$ ta có $x=4-2=2$.

Với $y=1$ ta có $x=4-1=3$.

TH2: Với $x=-2-y$, thế vào phương trình (2) ta được:

$$y^2-2y+(y+2)y=-4$$
$$\Leftrightarrow y^2-2y+y^2+2y+4=0$$
$$\Leftrightarrow 2y^2+4=0$$

Nhận thấy $y^2\ge 0\ \forall y \Rightarrow 2y^2+4\ge 4>0\ \forall y$ nên phương trình $2y^2+4=0$ vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S=\{(2;2),(1;3)\}$.

Câu 3 (1,0 điểm):

Cách giải:

Cho hình lăng trụ đứng, đáy là tam giác vuông, chiều cao bằng 6. Số đo ba cạnh của tam giác đáy là các số nguyên. Số đo diện tích toàn phần của lăng trụ bằng số đo thể tích của lăng trụ. Tính số đo ba cạnh tam giác đáy của lăng trụ.

Gọi độ dài 2 cạnh góc vuông của tam giác đáy lần lượt là $x,\ y\ \left(x, y \in \mathbb{N}^*\right)$ $\Rightarrow$ độ dài cạnh huyền của tam giác đáy là $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x+y)^2-2xy}$ $\left(\sqrt{x^2+y^2}\in \mathbb{N}^*\right)$ (Định lí Pytago).

$\Rightarrow$ Diện tích tam giác đáy là $S_d=\frac{1}{2}xy$.

$\Rightarrow$ Thể tích lăng trụ là $V=h.S_d=6.\frac{1}{2}xy=3xy$.

Diện tích xung quanh của lăng trụ là $S_{xq}=6.\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

$\Rightarrow$ Diện tích toàn phần của lăng trụ là: $S_{tp}=S_{xq}+2S_d=6.\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}\right)+xy$.

Theo bài ra ta có: ***Số đo diện tích toàn phần của lăng trụ bằng số đo thể tích của lăng trụ*** nên ta có phương trình:

$$6.\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}\right)+xy=3xy$$
$$\Leftrightarrow 3\left(x+y+\sqrt{x^2+y^2}\right)=xy$$
$$\Leftrightarrow 3(x+y)+3\sqrt{x^2+y^2}=xy$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+y)^2-2xy}=\frac{xy-3(x+y)}{3}$$

Đặt $x+y=S,\ xy=P\ (S,\ P>0)$, ta có

$$\sqrt{S^2-2P}=\frac{P-3S}{3}$$
$$\Leftrightarrow S^2-2P=\left(\frac{P-3S}{3}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 9S^2-18P=P^2-6SP+9S^2$$
$$\Leftrightarrow P^2-6SP+18P=0$$
$$\Leftrightarrow P-6S+18=0\ \left(Do\ P>0\right)$$
$$\Leftrightarrow xy-6(x+y)+18=0$$
$$\Leftrightarrow xy-6x-6y+36=18$$
$$\Leftrightarrow x(x-6)-6(y-6)=18$$
$$\Leftrightarrow (x-6)(y-6)=18$$

Vì $x,\ y\in \mathbb{N}^*$ nên ta có bảng sau:

$x-6$	1	2	3	6	9	18
$y-6$	18	9	6	3	2	1

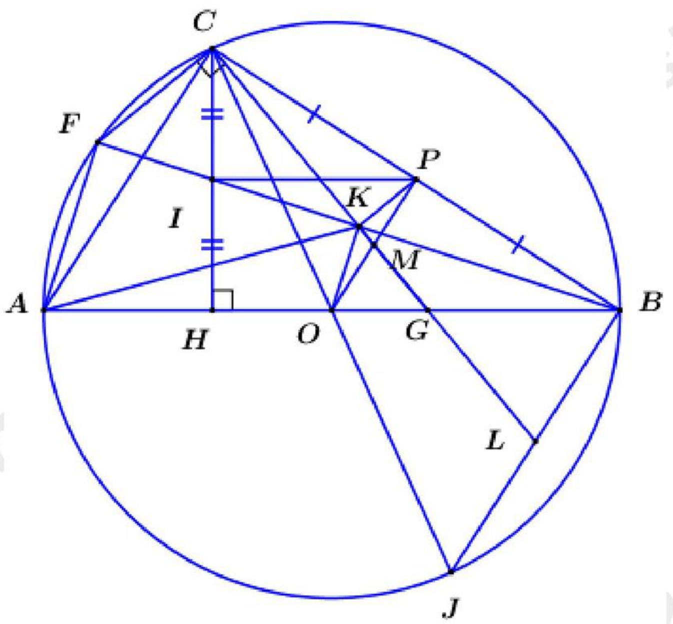
x	7	8	9	12	15	24
y	24	15	12	9	8	7
$\sqrt{x^2+y^2}$	25	17	15	15	17	25
	TM	TM	TM	TM	TM	TM

Vậy có 3 bộ số đo ba cạnh tam giác của đáy hình trụ thỏa mãn là $(7;24;25)$; $(8;15;17)$; $(9;12;15)$.

Câu 4 (3,5 điểm):

Cách giải:

Trên đường tròn tâm O đường kính AB lấy điểm C bất kì ($CA < CB$, C khác A). Gọi H là hình chiếu của C trên AB, I là trung điểm của CH. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm F (F khác B). Qua điểm C Kẻ đường thẳng vuông góc với CF, đường thẳng này cắt FB tại điểm K. Gọi P là trung điểm của BC.



a. Chứng minh $BI.BF = BC^2$.

Ta có: $\angle BFC = \angle BAC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BC).

Lại có $\angle BAC = \angle BCH$ (cùng phụ với $\angle ACH$)

$\Rightarrow \angle BFC = \angle BCH = \angle BCI$.

Xét ΔBCI và ΔBFC có:

$\angle CBF$ chung;

$\angle BCI = \angle BFC\ (cmt)$;

$\Rightarrow \Delta BCI \sim \Delta BFC\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{BC}{BI}=\dfrac{BF}{BC}$ (2 cạnh tương ứng).

$\Rightarrow BI.BF=BC^2$ $(dpcm)$.

b. Chứng minh tứ giác $CPKI$ nội tiếp.

Nối IP. Ta có IP là đường trung bình của tam giác BCH nên $IP//BH$ (tính chất)

$\Rightarrow \angle CPI=\angle CBH=\angle CBA$ (2 góc đồng vị).

Ta có: $\angle BAC=\angle BFC$ (cmt) $\Rightarrow 90^0-\angle BAC=90^0-\angle BFC$

$\Rightarrow \angle CBA=\angle CKF$.

$\Rightarrow \angle CPI=\angle CKF=\angle CKI$.

$\Rightarrow$ Tứ giác $CPKI$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề cùng nhìn 1 cạnh dưới các góc bằng nhau).

c. Chứng minh KF là tia phân giác của $\angle CKA$.

Ta có: $\angle BAC=\angle BFC$ (cmt).

Mà $\angle BFC+\angle CKF=90^0$ (do tam giác CKF vuông tại C).

$\Rightarrow \angle BAC+\angle CKF=90^0$ (1).

Ta có: Tứ giác $CPKI$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow$ $BP.BC=BK.BI$.

$\Rightarrow 2BP.BC=2BK.BI$
$\Rightarrow BC^2=2BK.BI$

Theo ý a) ta có $BI.BF=BC^2$ $\Rightarrow 2BK.BI=BI.BF \Rightarrow 2BK=BF$ $\Rightarrow K$ là trung điểm của BF.

$\Rightarrow OK\perp BF$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung) $\Rightarrow \angle OKF=90^0$ (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow \angle BAC+\angle CKF+\angle OKF=90^0+90^0$
$\Rightarrow \angle BAC+\angle OKC=180^0$
$\Rightarrow \angle OAC+\angle OKC=180^0$

$\Rightarrow OACK$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0).

$\Rightarrow \angle OKA=\angle OCA$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OA).

Mà ΔABC vuông tại C ($\angle ACB=90^0$ - góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) có trung tuyến CO nên $CO=\dfrac{1}{2}AB=OA=OB$.

$\Rightarrow \Delta OAC$ cân tại $O \Rightarrow \angle OCA=\angle OAC=\angle BAC$.

$\Rightarrow \angle OKA = \angle BAC$
$\Rightarrow 90^0 - \angle OKA = 90^0 - \angle BAC$
$\Rightarrow \angle AKF = \angle ABC = \angle CPI = \angle CKF$

Vậy KF là tia phân giác của $\angle CKA$.

d. Khi C di chuyển trên đường tròn (O) ($CA < CB$, C khác A), chứng minh đường thẳng CK luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi $CK \cap OP = \{M\}$.

Có $\angle PCM = \angle FCA$ (cùng phụ $\angle ACK$)

$\angle FCA = \angle FBA$

$\Rightarrow \angle FCM = \angle FBA$

$\Rightarrow \Delta PCM \sim \Delta HBI\ (g.g)$

$\Rightarrow \frac{PM}{HI} = \frac{PC}{HB}$ (2 cạnh tương ứng) (3)

Lại có $\angle DCP = \angle OBP \Rightarrow \Delta OCP \sim \Delta CBH$.

$\Rightarrow \frac{PO}{HC} = \frac{PC}{HB}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{PM}{HI} = \frac{PO}{HC} \Rightarrow \frac{PM}{PO} = \frac{HI}{HC} = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow M$ là trung điểm của PO.

Kéo dài CO cắt (O) tại J, CM cắt BJ tại L.

Có $BJ // OP$ (cùng vuông góc với CB).

Theo bổ đề hình thang, có M là trung điểm của OP $\Rightarrow L$ là trung điểm của BJ.

Gọi G là giao điểm của BO và CK $\Rightarrow G$ là trọng tâm ΔCBJ $\Rightarrow \frac{GB}{BO} = \frac{2}{3} \Rightarrow GB = \frac{2}{3}R$ không đổi.

$\Rightarrow G$ cố định.

Vậy CK luôn qua G cố định (đpcm).

Câu 5 (1,0 điểm):

Cách giải:

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 < x < y \le 8$ và $xy \le 4x + 3y$. Chứng minh $x^2 + y^2 \le 100$.

Ta có $10^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow 10^2 = \frac{8^2}{y^2}.y^2 + \frac{6^2}{x^2}.x^2$

$\Rightarrow 10^2 = \left(y^2 - x^2\right).\frac{8^2}{y^2} + x^2\left(\frac{8^2}{y^2} + \frac{6^2}{x^2}\right)$ (phương pháp nhóm Albel)

$\Leftrightarrow 10^2 \ge \left(y^2 - x^2\right).1 + x^2.\frac{(8x)^2 + (6y)^2}{x^2y^2}$ (do $y \le 8$).

$\Leftrightarrow 10^2 \ge y^2 - x^2 + \frac{1}{y^2}.\frac{(8x+6y)^2}{2}$

$\Leftrightarrow 10^2 \ge y^2 - x^2 + \frac{1}{y^2}.\frac{(2xy)^2}{2}$ $\left(do\ 8x + 6y \ge 2xy\right)$

$\Leftrightarrow 10^2 \ge y^2 - x^2 + 2x^2$

$\Leftrightarrow 10^2 \ge y^2 + x^2$

Vậy $x^2 + y^2 \le 100$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \end{cases}$.

- HẾT -