

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (1,0 điểm). Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{49} - 3$

b) $B = \sqrt{(10 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{5}$

Câu 2 (1,5 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x+2}}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm giá trị của x để $P = \frac{1}{6}$

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Cho hàm số $y = 2x + b$. Tìm b biết rằng đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3

b) Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (m-1)x + m + 4$ (m là tham số).
Tìm điều kiện của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Câu 4 (1,5 điểm).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

b) Hai bạn An và Bình cùng may khẩu trang để ủng hộ địa phương đang có dịch bệnh Covid-19, thì mất hai ngày mới hoàn thành công việc. Nếu chỉ có một mình bạn An làm việc trong 4 ngày rồi nghỉ và bạn Bình làm tiếp trong 1 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Hỏi mỗi người làm riêng một mình thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc?

Câu 5 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình: $x^2 + 5x - 6 = 0$

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $x^2 - mx + m - 2 = 0$

có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1 - x_2 = 2\sqrt{5}$

Câu 6 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A , có độ dài các cạnh của tam giác thỏa mãn hệ thức: $BC^2 = (\sqrt{3} + 1)AC^2 + (\sqrt{3} - 1)AB \cdot AC$, hãy tính số đo góc \widehat{ABC}

Câu 7 (2,0 điểm). Cho đường tròn (O) , từ điểm A nằm ngoài đường tròn kẻ đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại B, C ($AB < AC$). Qua A kẻ đường thẳng không đi qua tâm O cắt đường tròn (O) tại D, E ($AD < AE$). Đường thẳng vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng CE tại F

a) Chứng minh tứ giác $ABEF$ nội tiếp

b) Gọi M là giao điểm thứ hai của FB với đường tròn (O) . Chứng minh: DM vuông góc với AC

c) Chứng minh: $CE \cdot CF + AD \cdot AE = AC^2$

HẾT

Câu 1 (1,0 điểm):

Cách giải:

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) Ta có: $A = \sqrt{49} - 3 = 7 - 3 = 4.$

b) Ta có: $B = \sqrt{(10 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{5} = |10 - \sqrt{5}| + \sqrt{5} = 10 - \sqrt{5} + \sqrt{5} = 10$

Câu 2 (1,5 điểm):

Cách giải:

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x+2}}$ (Với $x \geq 0, x \neq 4$).

a) Rút gọn biểu thức P.

Với $x \geq 0, x \neq 4$ ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2}{\sqrt{x-2}} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x+2}}$$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} + \frac{2(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \right) : \frac{x+4}{\sqrt{x+2}}$$

$$P = \frac{x - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{x+4}$$

$$P = \frac{x+4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{x+4}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $P = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

b) Tính giá trị của x để $P = \frac{1}{6}$.

Ta có: $P = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 8 \Leftrightarrow x = 64$ (tm DKXD).

Vậy với $x = 64$ thì $P = \frac{1}{6}$.

Câu 3 (1,0 điểm):

Cách giải:

Cho hàm số $y = 2x + b$. Tìm b biết rằng đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

Vì đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3 nên đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 0)$.

Thay $x = 3, y = 0$ vào hàm số ta được: $2.3 + b = 0 \Leftrightarrow b = -6$.

Vậy $b = -6$.

b) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = (m-1)x + m + 4$ (m là tham số). Tìm điều kiện của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Hoành độ giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng d là nghiệm của phương trình;

$$\begin{aligned}x^2 &= (m-1)x + m + 4 \\ \Leftrightarrow x^2 - (m-1)x - m - 4 &= 0 \quad (1)\end{aligned}$$

(P) cắt d tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

$$\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow -m - 4 < 0 \Leftrightarrow m > -4.$$

Vậy $m > -4$ thì (P) cắt d tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Câu 4 (1,5 điểm):

Cách giải:

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Ta có:
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

b) Hai bạn An và Bình cùng may khẩu trang để ủng hộ địa phương đang có dịch bệnh Covid-19, thì mất hai ngày mới hoàn thành công việc. Nếu chỉ có một mình bạn An làm việc trong 4 ngày rồi nghỉ và bạn Bình làm tiếp trong 1 ngày nữa thì hoàn thành công việc. Hỏi mỗi người làm riêng một mình thì sau bao lâu sẽ hoàn thành công việc ?

Gọi thời gian hoàn thành công việc một mình của An và Bình lần lượt là x, y (ngày; $x, y > 0$).

Một ngày An hoàn thành được: $\frac{1}{x}$ (công việc)

Một ngày Bình hoàn thành được: $\frac{1}{y}$ (công việc)

Do hai bạn cùng làm thì sau hai ngày xong công việc nên một ngày hai bạn hoàn thành được: $\frac{1}{2}$ (công việc)

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ (1)

Bạn An làm 4 ngày được $\frac{4}{x}$ (công việc)

Vì một mình bạn An làm việc trong 4 ngày rồi nghỉ và bạn Bình làm tiếp trong 1 ngày nữa thì hoàn thành công việc nên ta có phương trình: $\frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} \frac{1}{x} = a \\ \frac{1}{y} = b \end{cases}$ thì hệ phương trình trở thành:
$$\begin{cases} a + b = \frac{1}{2} \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Thay vào cách đặt ta được
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \text{ (tm)} \\ y = 3 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy An làm một mình sau 6 ngày xong công việc, Bình làm một mình sau 3 ngày xong công việc.

Câu 5 (2,0 điểm)

Cách giải:

a) Giải phương trình: $x^2 + 5x - 6 = 0$

Cách 1:

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 6x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) + 6(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -6 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-6; 1\}$.

Cách 2:

Ta có $\Delta = 5^2 - 4.1.(-6) = 49 > 0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2} = -6 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-6; 1\}$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - mx + m - 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:
 $x_1 - x_2 = 2\sqrt{5}$.

Phương trình $x^2 - mx + m - 2 = 0$ có 2 nghiệm khi và chỉ khi $\Delta > 0$.

$$\Leftrightarrow (-m)^2 - 4(m - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 8 > 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)^2 + 4 > 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Do đó phương trình đã cho luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 2 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có:

$$x_1 - x_2 = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 20$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) - 4x_1x_2 = 20$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4(m - 2) = 20$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \quad (1)$$

Ta có $\Delta_m = 2^2 - 1.(-12) = 16 > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} m_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{1} = 6 \\ m_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{1} = -2 \end{cases}$$

Vậy $m = 6$ hoặc $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6 (2,0 điểm)

Cách giải:

Cho tam giác ABC vuông tại A , có độ dài các cạnh của tam giác thỏa mãn hệ thức $BC^2 = (\sqrt{3} + 1)AC^2 + (\sqrt{3} - 1)AB \cdot AC$, hãy tính số đo góc $\angle ABC$.

Áp dụng định lí Pytago ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = (\sqrt{3} + 1)AC^2 + (\sqrt{3} - 1)AB.AC$$

$$\Leftrightarrow AB^2 = \sqrt{3}AC^2 + (\sqrt{3} - 1)AB.AC$$

$$\Leftrightarrow AB^2 - (\sqrt{3} - 1)AB.AC - \sqrt{3}AC^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + AB.AC - \sqrt{3}AB.AC - \sqrt{3}AC^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow AB(AB + AC) - \sqrt{3}AC(AB + AC) = 0$$

$$\Leftrightarrow (AB + AC)(AB - \sqrt{3}AC) = 0$$

$$\Leftrightarrow AB = \sqrt{3}AC \text{ (do } AB + AC > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cot \angle ABC = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 30^\circ$$

Vậy $\angle ABC = 30^\circ$.