UBND QUẬN LONG BIÊN
TRƯỜNG THCS ÁI MỘ

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG KHỐI 9
MÔN: TOÁN
NĂM HỌC: 2020-2021
Thời gian làm bài: 120 phút
Ngày kiểm tra: *26 tháng 5 năm 2021*

Bài 1(2,0 điểm)

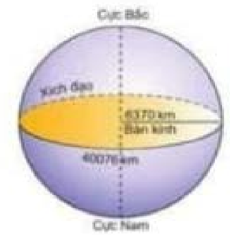
a) Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ khi $x=16$

b) Rút gọn biểu thức $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}+4}{x-1}$ (với $x\ge 0, x\ne 1$)

c) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $A.B\le -1$.

Bài 2 (2,0 điểm) ***Các bài toán có yếu tố thực tiễn.***

1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Để ủng hộ các gia đình gặp khó khăn tại một số địa phương do ảnh hưởng của dịch Covid-19, một số tổ chức thiện nguyện đã dự định chở 180 tấn hàng chia đều bằng một số xe cùng loại. Lúc khởi hành, có 2 xe bị hỏng nên mỗi xe phải chở thêm 3 tấn so với dự định. Hỏi ban đầu có bao nhiêu xe tham gia chở hàng?



2. Bán kính Trái Đất là 6370 km. Biết rằng 29% diện tích bề mặt trái đất không bị bao phủ bởi nước gồm núi, sa mạc, cao nguyên, đồng bằng và các địa hình khác. Tính diện tích bề mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước. *(Làm tròn đến hai chữ số thập phân, lấy $\pi=3{,}14$).*

Bài 3 (2,5 điểm) 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3\sqrt{x+1}-2\sqrt{y-1}=4\\ 2\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=5\end{cases}$.

2) Cho đường thẳng $(d): y=(m+2)x-2m$ (x là ẩn, m là tham số) và Parabol $(P): y=x^2$.

a) Với $m=2$, xác định tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P).

b) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{5}{2}$.

Bài 4 (3,0 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$ và C, D là hai điểm di động trên nửa đường tròn sao cho C thuộc cung AD và $\overset{\frown}{COD}=60^\circ$ ($C\ne A; D\ne B$). Gọi M là giao điểm của tia AC và BD, N là giao điểm của AD và BC. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của CD và MN.

a) Chứng minh tứ giác $CMDN$ nội tiếp.

b) Kẻ $AP\perp CD; BQ\perp CD\,(P,Q\in CD)$. Chứng minh $CP=DQ$ và $AP+BQ=R\sqrt{3}$.

c) Chứng minh rằng ba điểm H, I và O thẳng hàng. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MCD theo R khi C, D di chuyển trên nửa đường tròn thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài 5 (0,5 điểm) Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện sau: $x+2y=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}$

HƯỚNG DẪN.

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ khi $x=16$

b) Rút gọn biểu thức $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}+4}{x-1}$ (với $x\ge 0, x\ne 1$)

c) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $A.B\le -1$.

Lời giải

a) Thay $x=16$ vào biểu thức A ta được:

$$A=\frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}+1}=\frac{3}{5}$$

Vậy giá trị của biểu thức A là $\dfrac{3}{5}$ tại $x=16$

b) $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}+4}{x-1}$

$$=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}+1}-\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}+4}{x-1}$$

$$=\frac{x-\sqrt{x}-x-2\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{-5\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\frac{-5\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{-5}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $B=\dfrac{-5}{\sqrt{x}-1}$ với $x\ge 0, x\ne 1$

c) Để $A.B\le -1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.\frac{-5}{\sqrt{x}-1}\le -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{\sqrt{x}+1}\le -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{\sqrt{x}+1}+1\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\le 0$$

$\Leftrightarrow \dfrac{-4+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\le 0$ mà $\sqrt{x}+1>0$ với mọi $x\ge 0$

$$\Rightarrow -4+\sqrt{x}\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\le 4 \Leftrightarrow x\le 16$$

Kết hợp với điều kiện xác định, ta được: $0 \le x \le 16; x \ne 1$

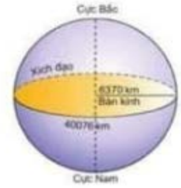
Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0;2;3;4;...;16\}$

Vậy $x \in \{0;2;3;4;...;16\}$ thì $A.B \le -1$.

Câu 2: **(2,0 điểm)** ***Các bài toán mang yếu tố thực tiễn.***

1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Để ủng hộ các gia đình gặp khó khăn tại một số địa phương do ảnh hưởng của dịch Covid-19, một số tổ chức thiện nguyện dự định chở 180 tấn hàng chia đều bằng một số xe cùng loại. Lúc khởi hành, có 2 xe bị hỏng nên mỗi xe phải chở thêm 3 tấn so với dự định. Hỏi ban đầu có bao nhiêu xe tham gia chở hàng?



2. Bán kính Trái Đất là 6370 km. Biết rằng 29% bề mặt Trái Đất không bị bao phủ bởi nước gồm núi, sa mạc, cao nguyên, đồng bằng và các địa hình khác. Tính diện tích bề mặt Trái Đất bị bao phủ bởi nước. *(Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai, lấy $\pi \approx 3,14$).*

Lời giải

1) Gọi số xe ban đầu tham gia chở hàng là: x (xe), ĐK: $x > 2; x \in N$

+) Ban đầu, mỗi xe chở số tần hàng là: $\dfrac{180}{x}$ (tấn)

+) Thực tế, số xe tham gia chở hàng là: $x-2$ (xe)

+) Thực tế, mỗi xe chở số tấn hàng là: $\dfrac{180}{x-2}$ (tấn)

Vì lúc khởi hành, có 2 xe bị hỏng nên mỗi xe phải chở thêm 3 tấn so với dự định, nên ta có phương trình: $\dfrac{180}{x-2} - \dfrac{180}{x} = 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{180x}{x(x-2)} - \dfrac{180(x-2)}{x(x-2)} = \dfrac{3x(x-2)}{x(x-2)}$

$\Rightarrow 180x - 180(x-2) = 3x^2 - 6x$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 360 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 120 = 0$

$\Leftrightarrow (x-12)(x+10) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-12=0 \\ x+10=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12\ (tm) \\ x=-10\ (ktm) \end{array}\right.$

Vậy số xe ban đầu tham gia chở hàng là: 12 (xe)

2) Bán kính của Trái Đất là: $R = 6370(km)$

Diện tích bề mặt của Trái Đất là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.6370^2 = 162307600\pi\left(km^2\right)$

Vì 29% bề mặt Trái Đất không bị bao phủ bởi nước, nên diện tích bề mặt của Trái Đất bị bao phủ bởi nước là: $(100\% - 29\%).162307600\pi \approx 71\%.162307600.3,14 \approx 361848563,44\left(km^2\right)$.

Câu 3: (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3\sqrt{x+1} - 2\sqrt{y-1} = 4 \\ 2\sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 5 \end{cases}$.

2) Cho đường thẳng $(d): y=(m+2)x-2m$ (với x là ẩn, m là tham số) và Parabol $(P): y=x^2$.

a) Với $m=2$, xác định tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P).

b) Tìm m để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{5}{2}$.

Lời giải

1) $\begin{cases} 3\sqrt{x+1}-2\sqrt{y-1}=4 \\ 2\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=5 \end{cases}$ (I)

Điều kiện: $x \ge -1; y \ge 1$.

Đặt $\sqrt{x+1}=a; \sqrt{y-1}=b \; (a,b \ge 0)$. Khi đó hệ phương trình (I) trở thành:

$$\begin{cases} 3a-2b=4 \\ 2a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=4 \\ 4a+2b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=4 \\ 7a=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \; (\text{tm } a \ge 0) \\ b=1 \; (\text{tm} \, b \ge 0) \end{cases}$$

Khi đó: $\begin{cases} \sqrt{x+1}=2 \\ \sqrt{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=4 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} (\text{tm } x \ge -1; y \ge 1)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(3;2)$.

2)

a) Với $m=2$ thì ta có đường thẳng $(d): y=4x-4$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) ta có:

$$x^2=4x-4 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2^2=4$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là: $(2;4)$.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P):

$$x^2=(m+2)x-2m \Leftrightarrow x^2-(m+2)x+2m=0 \; (1)$$

Để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Khi đó $\Delta > 0$

$$\Leftrightarrow \left[-(m+2)\right]^2-4.1.2m>0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2-8m>0$$

$$\Leftrightarrow m^2+4m+4-8m>0$$

$$\Leftrightarrow m^2-4m+4>0$$

$\Leftrightarrow (m-2)^2 > 0$

$\Leftrightarrow m \neq 2$

Với $m \neq 2$ thì đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2.

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) ,theo hệ thức Vi-et ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m+2 \\ x_1x_2 = 2m \end{cases}$$

Để x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$ thì $\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \end{cases}$ nghĩa là: $0^2 - (m+2).0 + 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$

Khi đó ta có:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}}{x_1x_2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{(m+2)^2 - 4m}{2m} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2 + 4}{2m} = \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow 2(m^2 + 4) = 5.2m$

$\Leftrightarrow 2m^2 + 8 = 10m$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 10m + 8 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 4 \end{array}\right.$(thỏa mãn $m \neq 0; m \neq 2$)

Vậy $m \in \{1; 4\}$ thì để đường thẳng (d) và parabol (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$.

Câu 4: (3,0 điểm)

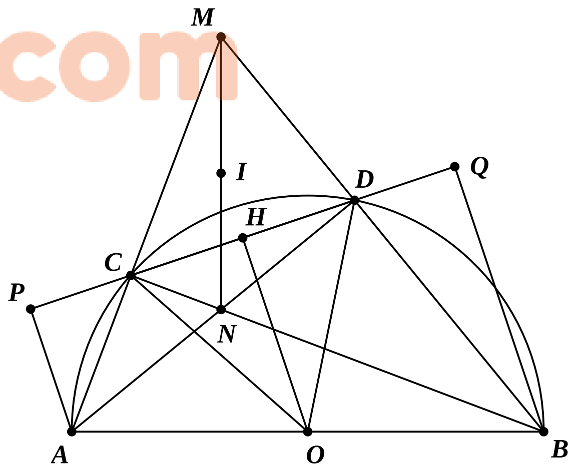
Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ và C, D là hai điểm di động trên nửa đường tròn sao cho C thuộc cung AD và $\widehat{COD} = 60°$ $(C \neq A; D \neq B)$. Gọi M là giao điểm của các tia AC và BD. N là giao điểm của dây AD và BC. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của CD và MN.

a) Chứng minh tứ giác $CMDN$ nội tiếp.

b) Kẻ $AP \perp CD; BQ \perp CD (P, Q \in CD)$. Chứng minh $CP = DQ$ và $AP + BQ = R\sqrt{3}$.

c) Chứng minh rằng ba điểm H, I và O thẳng hàng. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MCD theo R khi C, D di chuyển trên nửa đường tròn thỏa mãn điều kiện đề bài.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $CMDN$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{MCN}=\widehat{MDN}=90^\circ$ (kề bù với các góc vuông) $\Rightarrow$ tứ giác $CMDN$ nội tiếp đường tròn đường kính MN.

b) Kẻ $AP\perp CD; BQ\perp CD\left(P,Q\in CD\right)$. Chứng minh $CP=DQ$ và $AP+BQ=R\sqrt{3}$.

Vì H là trung điểm dây cung $CD\Rightarrow HC=HD; OH\perp CD$ (quann hệ vuông góc giữa đường kính và dây).

$\Rightarrow AP//OH//BQ$ (cùng vuông góc với CD) $\Rightarrow$ $APQB$ là hình thang có O là trung điểm của AB và $OH//AP//BQ\Rightarrow H$ là trung điểm $PQ\Rightarrow HP=HQ$ mà $HC=HD$

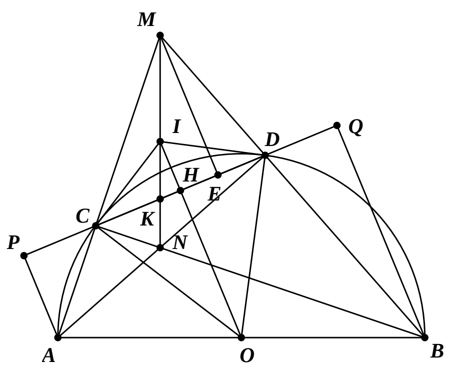
$\Rightarrow HP-HC=HQ-HD\Rightarrow CP=DQ$.

Tam giác OCD cân tại O có $\widehat{COD}=60^\circ\left(GT\right)$ $\Rightarrow \Delta OCD$ là tam giác đều cạnh $OC=R\Rightarrow$ đường cao $OH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Vì O là trung điểm AB; H là trung điểm $PQ\Rightarrow OH$ là đường trung bình của hình thang $APQB$ $\Rightarrow AP+BQ=2OH=2.\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=R\sqrt{3}$.

Vậy $AP+BQ=R\sqrt{3}$.

c) Chứng minh rằng ba điểm H,I và O thẳng hàng. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác MCD theo R khi C,D di chuyển trên nửa đường tròn thỏa mãn điều kiện đề bài.



Ta có I là trung điểm của $MN\Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CMDN\Rightarrow IC=ID$; mà $OC=OD=R\Rightarrow OI$ là đường trung trực của $CD\Rightarrow OI\perp CD$ tại trung điểm H của CD $\Rightarrow H,I,O$ thẳng hàng.

Gọi K là giao điểm của MN và CD kẻ $ME\perp CD$ tại E ta có $ME\le MK$ (quan hệ giữa đường vuông góc và đường xiên).

ΔOCD đều $\Rightarrow CD=OC=R$ không đổi nên diện tích tam giác MCD là:

$S_{MCD}=\dfrac{1}{2}ME.CD\le\dfrac{1}{2}MK.R$ nên diện tích ΔMCD lớn nhất khi $K\equiv E$ mà

$I\in MK; ME\perp CD; IH\perp CD\Rightarrow ME$ là trung trực của $CD\Rightarrow MC=MC\Rightarrow\Delta MCD$ cân tại M ;

Lại có $\widehat{CMD}$ là góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn nên

$\widehat{CMD}=\dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AB}-sd\,\overset{\frown}{CD}\right)=\dfrac{1}{2}\left(180^\circ-60^\circ\right)=60^\circ\ \Rightarrow\Delta MCD$ đều có cạnh $CD=R$

$\Rightarrow S_{MCD}=\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy diện tích lớn nhất của ΔMCD bằng $\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$ khi M,I,H,O thẳng hàng.

Câu 5: **(0,5 điểm)** Cho hai số dương x, y thỏa mãn điều kiện sau: $x+2y=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}$.

Lời giải

Ta chứng minh: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$ $(*)$ với các số dương a, b, c

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\ge 9$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các cặp số dương:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2$$

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{c}.\frac{c}{a}}=2$$

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\ge 2\sqrt{\frac{c}{b}.\frac{b}{c}}=2$$

Từ đó suy ra: $3+\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)\ge 9$ luôn đúng với các số dương a, b, c

Dấu bằng xảy ra khi: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$; $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$; $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}\Leftrightarrow a^2=b^2=c^2$ (với a, b, c dương) $\Leftrightarrow a=b=c$

Áp dụng bất đẳng thức $(*)$ cho các số dương sau:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\ge\frac{9}{x+y+y}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\ge\frac{9}{x+2y}=\frac{9}{3}=3$$

Dấu bằng xảy ra khi: $x=y$ và $x+2y=3\Leftrightarrow x=y=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3 \Leftrightarrow x = y = 1$