SỞ GD&ĐT HÀ TĨNH
----o0o----

ĐỀ THI THỬ TN 2021 TRỰC TUYẾN LẦN THỨ 2
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 90 phút
Thời gian thi: 21h45, 23/05/2021

Câu 1. Trong một hộp bút gồm có 8 cây bút bi, 6 cây bút chì và 10 cây bút màu. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một cây bút từ hộp bút đó?

A. 480. **B.** 24. **C.** 48. **D.** 60.

Lời giải

Áp dụng quy tắc cộng.
Số cách chọn ra một cây bút từ hộp bút đó là $8+6+10=24$.

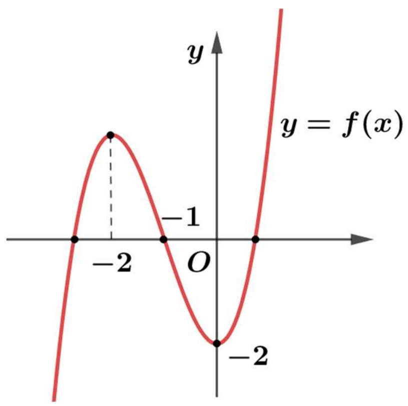
Câu 2. Ba số nào sau đây theo thứ tự là cấp số cộng:

A. $-1,3,7,10$. **B.** $2,6,8$. **C.** $11,14,17,20,24$. **D.** $7,3,-1,-5,-9$.

Lời giải

Dãy số $7,3,-1,-5,-9$ là cấp số cộng với $u_1=7; d=-4$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

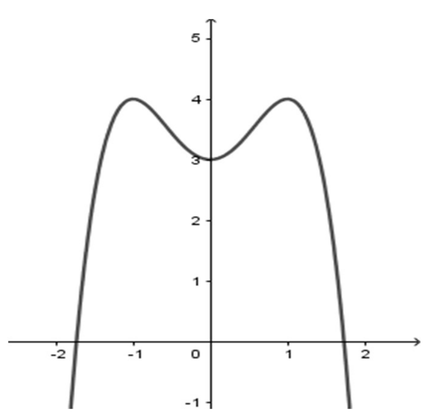


A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 5. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2+1$ là:

A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-1;6)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải:

$y'=-6x^2+6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Vạy điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(1;2)$.

Câu 6. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là đường thẳng

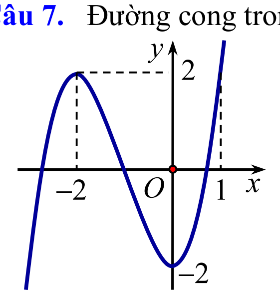
A. $y=-2$. **B.** $y=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=1 \Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 7. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=2x^3+6x^2-2$ **B.** $y=x^3+3x^2-2$.

C. $y=-x^3-3x^2-2$. **D.** $y=x^3-3x^2-2$.

Lời giải

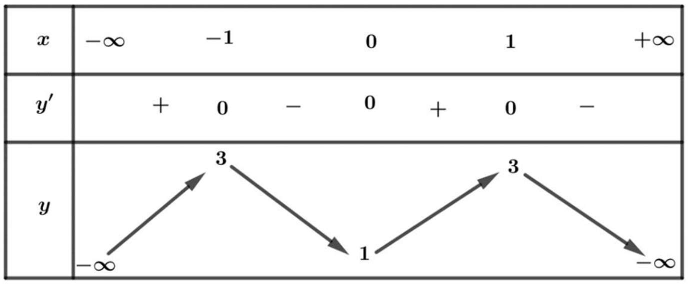
Từ đồ thị hàm số ta có:

Đồ thị trong hình là của hàm số bậc 3, có hệ số $a>0$.

Đồ thị hàm số đạt cực trị tại các điểm $A(-2;2);\mathrm{B}(0;-2)$.

Vậy chọn phương án B

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm của phương trình $f(x)=2$ là

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Số nghiệm của phương trình $f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=2$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2$. Dựa vào BBT ta thấy đường thẳng $y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt.

Câu 9. Nếu $\log_2 a=x$ thì

A. $x=2^a$. **B.** $a=x^2$. **C.** $a=2x$. **D.** $a=2^x$.

Lời giải

Theo định nghĩa lôgarit ta có $\log_2 a=x \Rightarrow a=2^x$.

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y=\log_2 x$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Câu 11. Với a là số thực khác 0, ta luôn có a^{-2} bằng

A. $\dfrac{2}{a}$. **B.** $\dfrac{1}{a^2}$. **C.** $-a^2$. **D.** $-2a$.

Lời giải

Áp dụng công thức $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$.

Câu 12. Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. **B.** $\ln(ab)=\ln a.\ln b$.

C. $\ln\dfrac{a}{b}=\dfrac{\ln a}{\ln b}$. **D.** $\ln\dfrac{a}{b}=\dfrac{\ln a}{b}$.

Lời giải

Theo công thức lôgarit của tích.

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\log_2(2x)=0$

A. $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=1$.

Lời giải

$\log_2(2x)=0 \Leftrightarrow 2x=2^0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)=x^2+1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3+x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+1+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x^2+1)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}x^3+x+C$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|x|+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln(2x)+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln|x|+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=-2\sin 2x+C$.

Lời giải

Áp dụng công thức ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|x|+C$.

Câu 16. Nếu $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=3$ thì $\int\limits_a^b 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_a^b 2f(x)\mathrm{d}x=2\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=2.3=6$.

Câu 17. Tích phân $\int\limits_1^3 5\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Ta có $\int\limits_1^3 5\mathrm{d}x=5x\Big|_1^3=10$

Câu 18. Phần ảo của số phức $z=3+2i$ là

A. 2. **B.** $2i$. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Phần ảo của số phức $z=3+2i$ là 2

Câu 19. Số phức nghịch đảo của số phức $z=3+4i$ là số phức

A. $3-4i$. **B.** $\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{5}i$. **C.** $\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}i$. **D.** $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}i$.

Lời giải

Số phức nghịch đảo của số phức $z=3+4i$ là số phức $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3+4i}=\dfrac{3-4i}{5}=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$.

Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ, số phức nào sau đây có điểm biểu diễn có tọa độ là $(3;-2)$?

A. $-2-3i$. **B.** $-2+3i$. **C.** $3+2i$. **D.** $3-2i$.

Lời giải

Điểm biểu diễn của số phức $3-2i$ có tọa độ là $(3;-2)$.

Câu 21. Một khối chóp có diện tích đáy bằng B và chiều cao bằng h. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. $\frac{1}{3}Bh$. **B.** Bh. **C.** $\frac{4}{3}Bh$. **D.** $\frac{2}{3}Bh$.

Lời giải

Thể tích của khối chóp đó bằng là $V=\frac{1}{3}Bh$.

Câu 22. Khối lập phương có thể tích bằng 8 thì có cạnh bằng

A. 24. **B.** 2. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 8^3.

Lời giải

Khối lập phương có thể tích bằng 8 thì có cạnh bằng 2.

Câu 23. Thể tích V của khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h bằng

A. $V=\pi rh$. **B.** $V=\pi r^2h$. **C.** $V=\frac{1}{3}\pi rh$. **D.** $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Lời giải

Ta có: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Câu 24. Khối cầu có bán kính R thì có thể tích bằng

A. $\frac{3}{4}\pi R^3$. **B.** $4\pi R^2$. **C.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **D.** $\frac{4}{3}R^3$.

Lời giải

Khối cầu có bán kính R thì có thể tích bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(1;-1;2)$ và $\vec{v}=(-1;2;0)$. Vectơ $\vec{u}+\vec{v}$ có toạ độ là

A. $(-1;-2;0)$. **B.** $(0;1;2)$. **C.** $(-2;3;-2)$. **D.** $(2;-3;2)$.

Lời giải

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=2+t\\z=2-3t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\overrightarrow{u_1}=(-1;2;2)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(-2;1;-6)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(2;-4;-4)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(-1;1;-3)$.

Lời giải

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng toạ độ Oyz có một vectơ pháp tuyến có toạ độ là

A. $(1;0;0)$. **B.** $(0;1;1)$. **C.** $(0;0;1)$. **D.** $(0;1;0)$.

Lời giải

Mặt phẳng toạ độ Oyz có một vectơ pháp tuyến có toạ độ là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2+y^2-2x-4y-1=0$. **B.** $2x^2+2y^2+2z^2-1=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6=0$. **D.** $x^2+y^2+2z^2-2x+4z-1=0$.

Câu 29. Chọn ngẫu nhiên một số trong các số tự nhiên từ 1 đến 30. Xác suất để chọn được số có hai chữ số phân biệt bằng

A. $\frac{19}{20}$. **B.** $\frac{9}{15}$. **C.** $\frac{19}{30}$. **D.** $\frac{19}{21}$.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega)=30$.

Từ 10 đến 30 có tất cả 21 số có 2 chữ số, trong đó các số có hai chữ số bằng nhau gồm $11,22$.

Suy ra từ 1 đến 50 có tất cả 19 số có hai chữ số phân biệt.

Xác suất cần tìm là: $\frac{19}{30}$.

Câu 30. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\frac{x+1}{x-2}$. **B.** $y=\sqrt{x+1}$. **C.** $y=x^3-2x^2+3x$. **D.** $y=x^4-2x^2+5$

Lời giải

Hàm số $y=x^3-2x^2+3x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ và $y'=3x^2-4x+3>0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $y=x^3-2x^2+3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 31. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}+a$ trên đoạn $[0;2]$. Giá trị $M-m$ bằng

A. $2a+4$ **B.** $2a+2$ **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Hàm số $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}+a$ xác định và đơn điệu trên $[0;2]$.

Ta có $f(0)=a-1$, $f(2)=a+1$, do đó $M=a+2$, $m=a-2$.

Vậy $M-m=4$.

Câu 32. Cho phương trình: $\log_3(3^x-1).\log_3(3^{x+1}-3)=1$. Đặt $\mathrm{t}=\log_3(3^x-1)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $t^2+t-1=0$. **B.** $t^2-1=0$. **C.** $2t^2-1=0$. **D.** $3t^2-1=0$.

Lời giải

Ta có $\log_3(3^{x+1}-3)=\log_3[3(3^x-1)]=\log_3 3+\log_3(3^x-1)=1+t$.

Do đó phương trình đã cho trở thành $t(t+1)=1\Leftrightarrow t^2+t-1=0$

Câu 33. Nếu $\int_1^3[2f'(x)+1]\mathrm{d}x=5$ và $f(1)=-1$ thì $f(3)$ bằng

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** $\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có $\int_1^3[2f'(x)+1]dx=5\Rightarrow 2[f(3)-f(1)]+2=5\Rightarrow f(3)=\frac{3}{2}+f(1)=\frac{1}{2}$.

Câu 34. Cho z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-2z+5=0$ trên tập hợp các số phức. Môđun của số phức $(1+i)z_0$ bằng

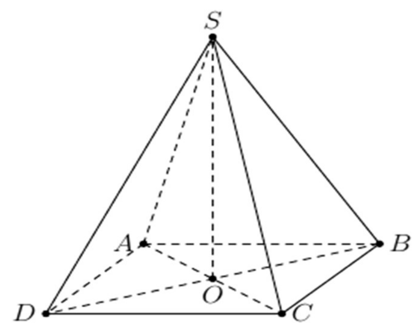
A. $2\sqrt{2}$ **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $\sqrt{10}$

Lời giải

Phương trình $z^2-2z+5=0$ có hai nghiệm phức $1\pm 2i$, suy ra $z_0=1+2i$.

$(1+i)z_0=(1+i)(1+2i)=-1+3i \Rightarrow \left|(1+i)z_0\right|=\left|-1+3i\right|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$

Câu 35. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ (hình vẽ).



Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $75°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Gọi O là tâm của đáy, ta có $SO\perp(ABCD)$ suy ra góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SAO}$.

Tam giác SAC cân tại A, có $AC=SA=a\sqrt{2}$ nên SAC là tam giác đều, suy ra $\widehat{SAO}=60°$.

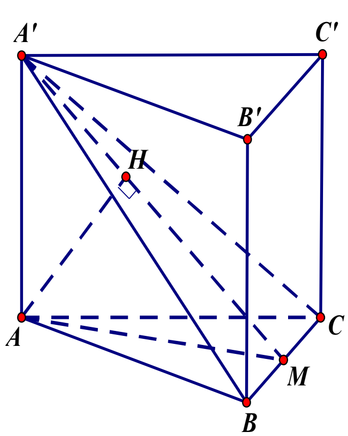
Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$.

Câu 36. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{16}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}a^3}{12}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{48}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC, H là hình chiếu của A trên $A'M$. Nhận xét $d\left(A,(A'BC)\right)=AH$.

Tam giác $AA'M$ vuông tại A nên có:

$$\frac{1}{A'A^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{AH^2}\Rightarrow\frac{1}{A'A^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{4}{a^2}\Rightarrow\frac{1}{A'A^2}=\frac{8}{3a^2}\Rightarrow AA'=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Thể tích của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{4}=\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. Biết rằng mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm A,B phân biệt. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $AB=9$. **B.** $AB=4$. **C.** $AB=2$. **D.** $AB=6$.

Lời giải

Toạ độ A,B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9\\x=y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=0\\(z+1)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=0\\\left[\begin{array}{l}z=1\\z=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y=0\\z=1\end{cases}\\\begin{cases}x=y=0\\z=-3\end{cases}\end{array}\right..$$

Toạ độ hai điểm A,B là $(0;0;1)$ và $(0;0;-3)$.

Vậy $AB=4$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-1;1)$, $B(3;1;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là

A. $2x+y-z-2=0$. **B.** $2x+y-2=0$. **C.** $x+2y-2=0$. **D.** $x+2y-z-2=0$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB. Ta có: $I(1;0;1)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua $I(1;0;1)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(4;2;0)$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm là: $4(x-1)+2(y-0)+0(z-1)=0\Leftrightarrow 2x+y-2=0$.

Câu 39. Cho $y=f(x)$ là hàm số xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(3-2x)$ có bảng xét dấu như sau.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		3		4		$+\infty$
$f'(3-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Đặt $u=3-2x\Rightarrow x=\frac{3-u}{2}$. Ta có $f'(3-2x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\x=\frac{5}{2}\\x=3\\x=4\end{array}\right.$.

Suy ra $f'(u)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3-u}{2}=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3-u}{2}=\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{3-u}{2}=3\\ \dfrac{3-u}{2}=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=4\\ u=-2\\ u=-3\\ u=-5\end{array}\right.$.

Hơn nữa $f'(u)>0 \Leftrightarrow f'(3-2x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2}\\ x>4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2}<\dfrac{3-u}{2}<\dfrac{5}{2}\\ \dfrac{3-u}{2}>4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<u<4\\ u<-5\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		-3		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$		$\searrow$	

Câu 40. Cho phương trình $\log_2\left(m+\sqrt{m+2^x}\right)=2x$ (m tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m nhỏ hơn 2021 sao cho phương trình đã cho có nghiệm?

A. 2020. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2021.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với phương trình :

$m+\sqrt{m+2^x}=2^{2x} \Leftrightarrow \left(m+2^x\right)+\sqrt{m+2^x}=2^{2x}+2^x \;(1)$

Ta có $\sqrt{m+2^x}\ge 0$, $2^x>0$. Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^2+t$ trên $[0;+\infty)$.

$f'(t)=2t+1\ge 0, \forall t\in[0;+\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$ do đó $(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{m+2^x}\right)=f\left(2^x\right) \Leftrightarrow \sqrt{m+2^x}=2^x$ $\Leftrightarrow m=2^{2x}-2^x$.

Đặt $a=2^x$, $a>0$. Ta có $\Leftrightarrow m=g(a)=a^2-a$.

a	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(a)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$-\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{4}$ mà m nguyên dương nhỏ hơn 2021 nên $m\in\{1;2;3;...;2020\}$.

Vậy có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $\int_{-1}^1 f(|4x-1|)\mathrm{d}x$

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $\int_{-1}^1 f(|4x-1|)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)\mathrm{d}x$.

Tính: $A = \int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)\mathrm{d}x$. Đặt $t = -4x+1 \Rightarrow -\frac{1}{4}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \Rightarrow A = -\frac{1}{4}\int_5^0 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^5 f(t)\mathrm{d}t = 1$

Tính: $B = \int_{\frac{1}{4}}^1 f(4x-1)\mathrm{d}x$. Đặt $t = 4x-1 \Rightarrow \frac{1}{4}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x \Rightarrow B = \frac{1}{4}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t = 2$.

Vậy $\int_{-1}^1 f(|4x-1|)\mathrm{d}x = A + B = 3$.

Câu 42. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(z+2i)^2$ là số thuần ảo và $(z+i)(\overline{z}-2)$ là số thực?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $z = a+bi$, $(a,b \in \mathbb{R})$.

$(z+i)(\overline{z}-2) = [a+(b+1)i][(a-2)-bi]$ là số thực $\Leftrightarrow (a-2)(b+1) - ab = 0 \Leftrightarrow a-2b-2 = 0$ (1)

Lại có $(z+2i)^2 = [a+(b+2)i]^2$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a^2 - (b+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b-2=0 \\ a+b+2=0 \end{array}\right.$ (2)

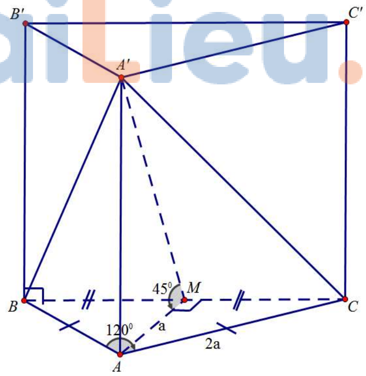
Từ (1) và (2) ta có 2 số phức thỏa mãn bài toán là 2 và $-\frac{2}{3} - \frac{4}{3}i$.

Câu 43. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = AC = 2a$, $\widehat{CAB} = 120°$, góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $45°$. Tính thể tích khối trụ có hai đáy là hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $A'B'C'$.

A. $V = 2\pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $V = \frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = 4\pi a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 4\pi a^3$

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $AM \perp BC$ và $\widehat{CAM} = 60°$ (do ΔABC cân tại A)

Ta xác định được góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MA} = 45°$

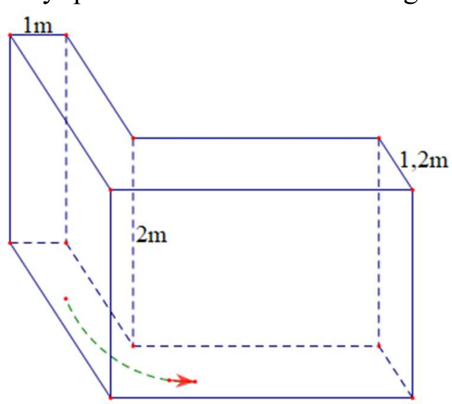
Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}.(2a)^2 \sin 120° = a^2\sqrt{3}$ và

$AM = AC\cos\widehat{MAC} = 2a.\cos 60° = a$; $AA' = AM.\tan\widehat{A'MA} = a$;
$BC = 2BM = 2\sqrt{AB^2 - AM^2} = 2\sqrt{4a^2 - a^2} = 2a\sqrt{3}$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $2r = \frac{BC}{\sin\widehat{BAC}} \Rightarrow r = \frac{2a\sqrt{3}}{2\sin 60°} = 2a$.

Vậy thể tích khối trụ cần tìm là $V = \pi r^2 h = \pi.(2a)^2.a = 4\pi a^3$.

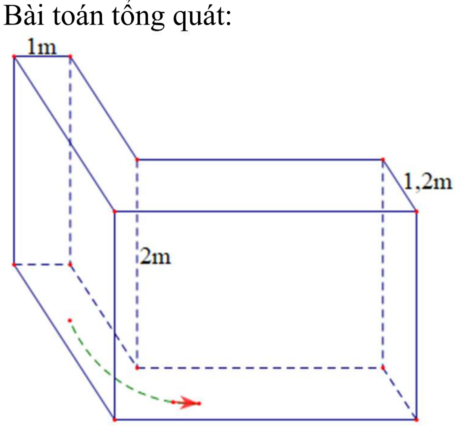
Câu 44. Hành lang trong một tòa nhà có dạng chữ L (hình vẽ) có chiều cao 2 m, một phía rộng 1 m, một phía rộng $1,2$ m. Một người thợ cần mang một số ống thép cứng các loại có độ dài 2 m, $2,5$ m, 3 m, $3,5$ m, 4 m, từ bên này qua bên kia. Hỏi có thể mang được mấy loại qua lối đi đó?



A. 4 loại. **B.** 3 loại. **C.** 5 loại. **D.** 2 loại.

Lời giải

Bài toán tổng quát:



với các kích thước như hình vẽ, $l^2=\left(\dfrac{b}{\sin\alpha}+\dfrac{a}{\cos\alpha}\right)^2+c^2$.

Độ dài ống thép dài nhất có thể mang qua bằng giá trị nhỏ nhất của l. Khi đó $\dfrac{b}{\sin\alpha}+\dfrac{a}{\cos\alpha}$ nhỏ nhất.

Tương ứng khi $\tan\alpha=\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}=\sqrt[3]{1,2}$. Độ dài lớn nhất của thang gần bằng $3,7\,\text{m}$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;-2)$, đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{3}$, và mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$. Đường thẳng d đi qua điểm A, song song (P) và vuông góc với Δ có phương trình

A. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z+2}{-3}$. **B.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z}{2}$.

C. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{-5}=\dfrac{z+5}{-3}$. **D.** $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-6}{5}=\dfrac{z+5}{-3}$.

Lời giải

$\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;3)$, $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;-1;-1)$. Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là $\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(2;5;-3)$.

Phương trình đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{z+2}{-3}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

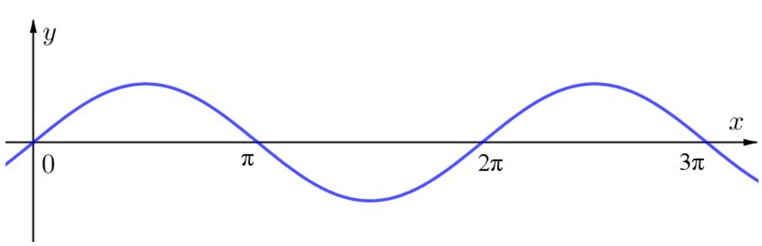
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2\sin x+m)+2=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $[0;3\pi]$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$f(2\sin x+m)+2=0\Leftrightarrow f(2\sin x+m)=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\sin x+m=-1\\2\sin x+m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{-m-1}{2}\\\sin x=\dfrac{-m+1}{2}\end{array}\right.$.



Nhận xét $\dfrac{-m+1}{2}-\dfrac{-m-1}{2}=1$.

Để phương trình $f(2\sin x+m)+2=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $[0;3\pi]$ thì

$\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{-m-1}{2} \quad (1)\\ \sin x=\dfrac{-m+1}{2} \quad (2)\end{array}\right.$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$.

$\Leftrightarrow (1)$ có 4 nghiệm phân biệt và (2) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$ hoặc (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\sin x$, để (1) có 4 nghiệm phân biệt và (2) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$ hoặc (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) có 4 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$ thì

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{-m-1}{2}=0\\ \dfrac{-m+1}{2}=1\end{cases}\\ \begin{cases}-1<\dfrac{-m-1}{2}<0\\ 0\le\dfrac{-m+1}{2}<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ \begin{cases}-1<m<1\\ -1<m\le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -1\le m<1.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là $m=0;m=-1$ để phương trình $f\left(2\sin x+m\right)+2=0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$.

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên y để tồn tại số thực x thỏa mãn $\log_3\left(x+2y\right)=\log_2\left(x^2+y^2\right)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_3\left(x+2y\right)=\log_2\left(x^2+y^2\right)=t \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=3^t\\ x^2+y^2=2^t\end{cases}$ (*)

Ta có $\left(x+2y\right)^2\le\left(1+4\right)\left(x^2+y^2\right)=5\left(x^2+y^2\right)$ nên: $9^t\le 5.2^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{2}\right)^t\le 5 \Leftrightarrow t\le\log_{\frac{9}{2}}5$.

Suy ra $x^2+y^2=2^t\le 2^{\log_{\frac{9}{2}}5}\approx 2.1$.

Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\left\{-1;0;1\right\}$.

+Với $y=-1$, hệ (*) trở thành $\begin{cases}x-1=3^t\\ x^2+1=2^t\end{cases} \Rightarrow \left(3^t+1\right)^2+1=2^t \Leftrightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2=0$ (**)

Nếu $t<0$ thì $2-2^t>0\Rightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2>0$.

Nếu $t\ge 0\Rightarrow 9^t-2^t\ge 0\Rightarrow 9^t+2.3^t-2^t+2>0$.

Vậy (**) vô nghiệm.

- Với $y=0$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases}x=3^t\\ x^2=2^t\end{cases} \Rightarrow 9^t=2^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{9}{2}\right)^t=1 \Leftrightarrow t=0\Rightarrow x=1$.

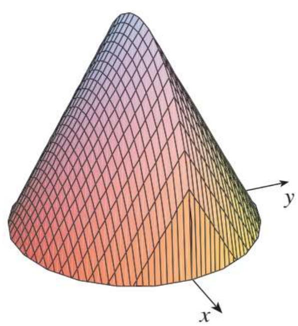
- Với $y=1$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases} x+1=3^t \\ x^2+1=2^t \end{cases} \Rightarrow \left(3^t-1\right)^2=2^t-1\ (***)$.

Dễ thấy (***) luôn có ít nhất một nghiệm $t=0 \Rightarrow x=0$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của y thỏa mãn là $y=0,\ y=1$.

Câu 48. Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.

A. $V=\sqrt{3}$. **B.** $V=3\sqrt{3}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\pi$.



Lời giải

Chọn C

Tại vị trí có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ thì tam giác thiết diện có cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$.

Do đó tam giác thiết diện có diện tích $S(x)=\left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\left(1-x^2\right)$.

Vậy thể tích V của vật thể là: $\int_{-1}^{1}\sqrt{3}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 49. Cho a là số thực, trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$ có hai nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN có một góc bằng $120°$, tính tổng các giá trị của a.

A. -6. **B.** 6. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Vì O, M, N không thẳng hàng nên z_1, z_2 không đồng thời là số thực, cũng không đồng thời là số thuần ảo do đó, ta phải có: $\Delta=a^2-12a+16<0 \Leftrightarrow a\in\left(6-2\sqrt{5};\,6+2\sqrt{5}\right)$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} z_1=\dfrac{2-a}{2}-\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \\ z_2=\dfrac{2-a}{2}+\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i \end{cases}$.

$\Rightarrow OM=ON=|z_1|=|z_2|=\sqrt{2a-3}$ và $MN=|z_1-z_2|=\sqrt{-a^2+12a-16}$.

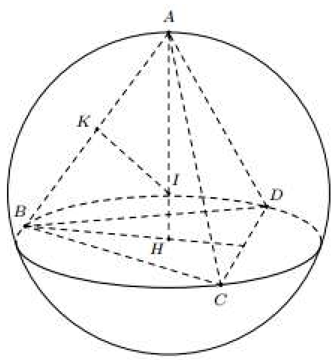
Tam giác OMN cân nên $\widehat{MON}=120^\circ$ $\Rightarrow \dfrac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM.ON}=\cos 120^\circ$ $\Leftrightarrow \dfrac{a^2-8a+10}{2(2a-3)}=-\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow a^2-6a+7=0$ $\Leftrightarrow a=3\pm\sqrt{2}$ (thỏa mãn).

Suy ra tổng các giá trị cần tìm của a là 6.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;1;1)$ và đi qua điểm $A(0;2;0)$. Xét khối chóp đều $A.BCD$ có B, C, D thuộc mặt cầu (S). Khi khối tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất, mặt phẳng (BCD) có phương trình dạng $x+by+cz+d=0$. Giá trị của $b+c+d$ bằng

A. -2. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải



Mặt cầu (S) có bán kính $R=IA=\sqrt{3}$

Gọi H, K lần lượt là tâm của tam giác đều BCD và trung điểm AB.

Nhận thấy ΔAKI và ΔAHB là các tam giác vuông đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{AK}{AH}=\dfrac{AI}{AB} \Leftrightarrow AB^2=2\sqrt{3}AH \Leftrightarrow BH^2=2\sqrt{3}AH-AH^2$

Khi đó $V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}AH.S_{BCD}=\dfrac{1}{3}AH.\dfrac{3\sqrt{3}BH^2}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AH\left(2\sqrt{3}AH-AH^2\right)$

Đặt $x=AH$ $\left(0<x<2\sqrt{3}\right)$

Xét hàm số $f(x)=x\left(2\sqrt{3}x-x^2\right)=-x^3+2\sqrt{3}x^2$

Ta có: $f'(x)=-3x^2+4\sqrt{3}x;\ f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (KTM) \\ x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{4\sqrt{3}}{3}$		$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{32\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

Ta thấy $f(x)$ lớn nhất khi $AH=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

Khi $AH=\frac{4\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AI}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$

Khi đó mặt phẳng (BCD) đi qua H và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AI}=(1;-1;1)$ nên có PT: $x-\frac{4}{3}-\left(y-\frac{2}{3}\right)+z-\frac{4}{3}=0\Leftrightarrow x-y+z-2=0$

Vậy $b=-1;c=1;d=-2;\ b+c+d=-2$.

HẾT