

Bài I (2,0 điểm). Cho hai biểu thức $P = \frac{x}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$

$$\text{và } Q = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9.$$

1) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 64$.

2) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$.

3) Với $x \in \mathbb{N}$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $K = Q.(P-1)$.

Bài II (2,5 điểm).

1. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Theo kế hoạch, một tổ phải sản xuất 400 chai nước rửa tay trong một thời gian quy định. Thực tế để đáp ứng nhu cầu của khách hàng trong đợt dịch Covid 19, mỗi giờ tổ làm thêm 10 chai so với kế hoạch. Vì vậy tổ chẳng những đã hoàn thành công việc sớm hơn 1 giờ so với kế hoạch mà còn sản xuất thêm được 50 chai nữa. Hỏi theo kế hoạch, mỗi giờ tổ phải sản xuất bao nhiêu chai nước rửa tay?

2. Bể chứa nước của một khu tập thể là một hình cầu mà phần chứa nước có bán kính 1m. Khi bể đang chứa đầy nước, người ta cho nước chảy vào các thùng phi hình trụ mà phần chứa nước có đường kính đáy là 0,4m, chiều cao 0,8m. Hỏi sau khi đổ đầy nước vào 40 thùng phi như trên thì trong bể còn lại bao nhiêu m^3 nước?

Bài III (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{y+2}} = 4 \\ \frac{2}{x-1} + \frac{3}{\sqrt{y+2}} = 5 \end{cases}$$

2) Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + 2$

a) Chứng minh rằng: (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Gọi hoành độ của điểm A và B tương ứng là x_1, x_2 . Chứng minh $|x_1 - x_2| \geq 2$.

Bài IV (3 điểm). Cho đường tròn (O; R) đường kính BC. Gọi A là điểm chính giữa của cung BC. Điểm M thuộc đoạn thẳng BC. Kẻ $ME \perp AB (E \in AB), MF \perp AC (F \in AC), MN \perp EF (N \in EF)$

1. Chứng minh AEMF là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh: $BE \cdot BA = BO \cdot BM$

3. Tiếp tuyến của đường tròn (O, R) tại A cắt MF tại K. Kẻ đường kính AI. Chứng minh 3 điểm N, M, I thẳng hàng.

Bài V. (0, 5 điểm). Cho $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$.

Chứng minh: $\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq 2(a + b + c)$.