TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH LỚP 10

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề gồm 02 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2021
Khóa ngày 31 tháng 5 năm 2021
Môn thi: TOÁN (VÒNG 1)
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (*1,5 điểm*)

a. Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

b. Giải phương trình: $3x^2 - 14x - 5 = 0$.

c. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x + 3y = 25 \\ 3x - 4y = 0. \end{cases}$

Câu 2. (*1,5 điểm*) Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = (m^2 - 2m + 4)x + 3$.

a. Vẽ đường thẳng (d) khi $m = 1$.

b. Tìm m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = 4x + m + 1$.

c. Tìm m để đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất. 0,5

Câu 3. (*1,0 điểm*) Một xe máy và một xe ô tô cùng khởi hành đi từ A đến B. Xe máy đi với vận tốc 40 km/h, xe ô tô đi với vận tốc 60 km/h. Sau khi mỗi xe đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường thì xe ô tô nghỉ 40 phút rồi chạy tiếp đến B; xe máy trên $\frac{1}{2}$ quãng đường còn lại đã tăng vận tốc thêm 10 km/h nhưng vẫn đến B chậm hơn xe ô tô $\frac{1}{2}$ giờ. Hãy tính quãng đường AB.

Câu 4. *(2,0 điểm)* Cho phương trình: $x^2 - 2(a-1)x + 2a - 5 = 0$. (1)

a. Chứng minh rằng, phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của a.

b. Tìm giá trị của a để phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

c. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào a. 1

Câu 5. *(3,0 điểm)* Cho đường tròn $(O; R)$. Một cát tuyến xy cắt (O) tại E và F. Trên xy lấy điểm A nằm ngoài đoạn EF, vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với (O). Gọi H là trung điểm EF.

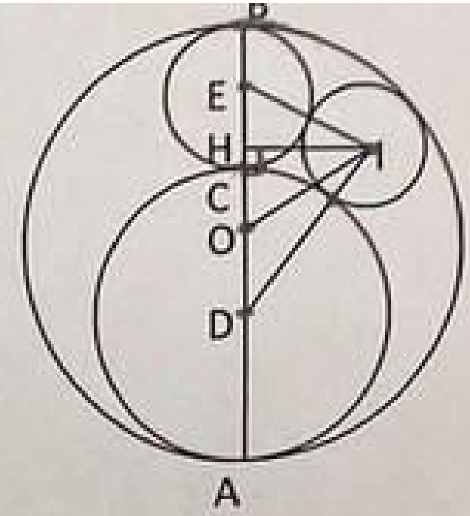
a. Chứng tỏ 5 điểm A, B, C, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b. Đường thẳng BC cắt OA và OH lần lượt tại I và K. Chứng minh:

$$OI.OA = OH.OK = R^2.$$

c. Chứng minh KE, KF là hai tiếp tuyến của đường tròn (O). 0,75

Câu 6. ***(1,0 điểm)*** Cho đường tròn đường kính $AB = 3cm$. Vẽ các đường tròn có đường kính $AC = 2cm$ và $CB = 1cm$. Gọi O, D và E lần lượt là tâm các đường tròn đường kính AB, đường kính AC và đường kính BC. Kí hiệu $(I; r)$ là tâm và bán kính đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn trên (như hình vẽ). H là chân đường vuông góc từ điểm I đến AB.



a. Tính theo r các đại lượng: $HE^2 - HO^2$ và $HE^2 - HD^2$.

b. Từ ý **a.** hãy suy ra giá trị của r.

----------------------------- **Hết** -----------------------------

Câu 1 (1,5 điểm):

Cách giải:

a) Tính giá trị của biểu thức: $A=\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Ta có:

$$\begin{aligned}
A&=\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\\
&=\sqrt{2^2+2.2.\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{2^2-2.2.\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}\\
&=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\\
&=\left|2+\sqrt{3}\right|-\left|2-\sqrt{3}\right|\\
&=2+\sqrt{3}-\left(2-\sqrt{3}\right)\ \left(do\ \ 2-\sqrt{3}>0\right)\\
&=2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}\\
&=2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Vậy $A=2\sqrt{3}$.

b) Giải phương trình: $3x^2-14x-5=0$.

$3x^2-14x-5=0\ (*)$

Ta có: $\Delta'=\left(b'\right)^2-ac=7^2+3.5=64>0$

$\Rightarrow$ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{7+\sqrt{64}}{3}=5$ và $x_2=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{7-\sqrt{64}}{3}=\dfrac{1}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm: $S=\left\{\dfrac{1}{3};5\right\}$.

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x+3y=25\\3x-4y=0\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}4x+3y=25\\3x-4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+3y=25\\y=\dfrac{3x}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+3.\dfrac{3x}{4}=25\\y=\dfrac{3x}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{25}{4}x=25\\y=\dfrac{3x}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $S=(4;\,3)$.

Câu 2 (1,5 điểm):

Cách giải:

Cho đường thẳng (d) có phương trình $y=(m^2-2m+4)x+3$.’

a) Vẽ đường thẳng (d) khi $m=1$.

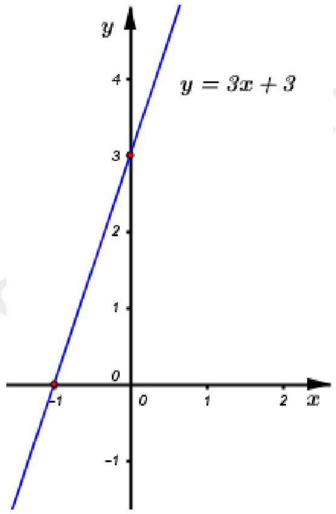
Với $m=1$ ta có: (d): $y=3x+3$

Ta có bảng giá trị:

x	0	-1
$y=3x+3$	3	0

Vậy với $m=1$ thì đồ thị hàm số (d): $y=3x+3$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0;\,3)$ và $(-1;\,0)$.

Đồ thị hàm số:



b) Tìm m để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y=4x+m+1$.

Đường thẳng (d): $y=(m^2-2m+4)x+3$ song song với đường thẳng $y=4x+m+1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m+4=4 \\ 3\neq m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-2m=0 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m-2)=0 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array} \right. \\ m\neq 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow m=0$$

Vậy $m=0$ thỏa mãn bài toán.

c) Tìm m để đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích lớn nhất.

Xét đường thẳng (d): $y=(m^2-2m+4)x+3$

Ta có: $m^2-2m+4=\left(m^2-2m+1\right)+3\ =\left(m-1\right)^2+3>0\ \forall m$

$\Rightarrow\left(d\right)$ là đường thẳng luôn cắt hai trục tọa độ với mọi m.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của $\left(d\right)$ với Ox và Oy.

+) Với $x=0\Rightarrow y=3\Rightarrow B\left(0;3\right)$.

+) Với $y=0\Rightarrow x=\dfrac{-3}{m^2-2m+4}\Rightarrow A\left(-\dfrac{3}{m^2-2m+4};0\right)$.

Khi đó ta có: Tam giác tạo bởi đường thẳng $\left(d\right)$ với hai trục tọa độ là ΔOAB.

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.\left|-\frac{3}{m^2-2m+4}\right|.3$$
$$=\frac{1}{2}.\frac{3}{\left|\left(m-1\right)^2+3\right|}.3$$
$$=\frac{9}{2}.\frac{1}{\left(m-1\right)^2+3}\ \left(do\ \left(m-1\right)^2+3>0\ \forall m\right)$$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow\dfrac{1}{\left(m-1\right)^2+3}$ lớn nhất $\Leftrightarrow\left(m-1\right)^2+3$ nhỏ nhất

Ta có: $\left(m-1\right)^2+3\ge 3\ \forall m$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m-1=0\Leftrightarrow m=1$.

Vậy $m=1$ thỏa mãn bài toán.

Câu 3 (1,0 điểm):

Cách giải:

Một xe máy và một ô tô cùng khởi hình đi từ A đến B. Xe máy đi với vận tốc 40km/h, xe ô tô đi với vận tốc 60km/h. Sau khi mỗi xe đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường thì xe ô tô nghỉ 40 phút rồi chạy tiếp đến B, xe máy trên $\frac{1}{2}$ quãng đường còn lại đã tăng vận tốc thêm 10km/h nhưng vẫn đến B chậm hơn xe ô tô $\frac{1}{2}$ giờ. Hãy tính quãng đường AB.

Gọi độ dài quãng đường AB là $x\ \left(km\right)$ (ĐK: $x>0$).

Đổi: 40 phút = $\dfrac{2}{3}$ giờ.

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB (tính cả thời gian nghỉ) là $\dfrac{x}{60}+\dfrac{2}{3}\left(h\right)$.

Thời gian xe máy đi $\frac{1}{2}$ quãng đường đầu là: $\frac{x}{2}:40=\frac{x}{80}\,(h)$.

Vận tốc xe máy đi nửa quãng đường còn lại là $40+10=50\,(km/h)$.

Thời gian xe máy đi $\frac{1}{2}$ quãng đường còn lại là $\frac{x}{2}:50=\frac{x}{100}\,(h)$.

Thời gian xe máy đi hết quãng đường AB là: $\frac{x}{80}+\frac{x}{100}=\frac{9x}{400}\,(h)$.

Vì xe máy vẫn đến B chậm hơn xe ô tô $\frac{1}{2}$ giờ nên ta có phương trình

$$\frac{9x}{400}-\frac{1}{2}=\frac{x}{60}+\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{9x}{400}-\frac{x}{60}=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{27x-20x}{1200}=\frac{7}{6}$$
$$\Leftrightarrow \frac{7x}{1200}=\frac{7}{6}$$
$$\Leftrightarrow x=200\,(tm)$$

Vậy độ dài quãng đường AB là 200 km.

Câu 4 (2,0 điểm):

Cách giải:

Cho phương trình $x^2-2(a-1)x+2a-5=0 \qquad (1)$

a) Chứng minh rằng, phương trình (1) ***luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của*** a.

Ta có: $\Delta'=(a-1)^2-2a+5=a^2-2a+1-2a+5=a^2+6$

Vì $a^2\ge 0\ \forall a \Rightarrow a^2+6>0\ \forall a$

$\Rightarrow \Delta'>0\ \forall a$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi a.(đpcm)

b) Tìm giá trị của a ***để phương trình*** (1) ***có 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện*** $x_1^2+x_2^2=6$.

Theo câu a) với mọi giá trị của a thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1,x_2

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2(a-1) & (1) \\ x_1.x_2=2a-5 & (2) \end{cases}$

Theo đề bài ta có: $x_1^2+x_2^2=6$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1.x_2=6$
$\Leftrightarrow 4(a-1)^2-2(2a-5)=6$
$\Leftrightarrow 4a^2-8a+4-4a+10=6$
$\Leftrightarrow 4a^2-12a+8=0$
$\Leftrightarrow a^2-3a+2=0$

Ta có: $\Delta=3^2-4.2.1=1>0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1=\dfrac{3+\sqrt{1}}{2}=2$ và $x_2=\dfrac{3-\sqrt{1}}{2}=1$.

Vậy $a=2$ hoặc $a=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1,x_2 không phụ thuộc vào a.

Theo câu a) với mọi giá trị của a thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1,x_2

Ta có: $x_1.x_2=2a-5\Rightarrow 2a=x_1.x_2+5$

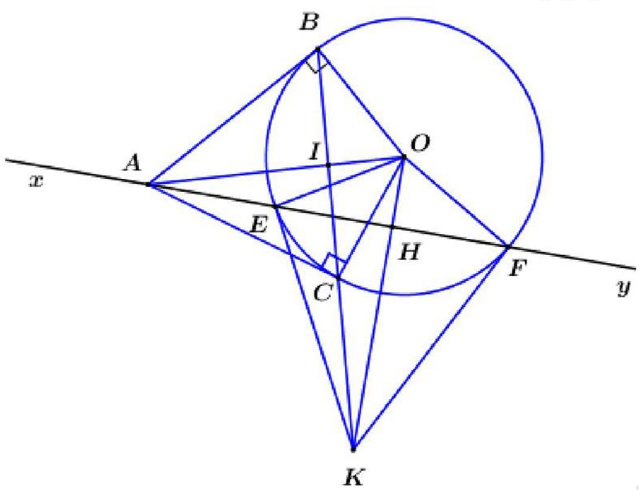
Thay $2a=x_1.x_2+5$ vào $x_1+x_2=2(a-1)$ ta có:

$\Leftrightarrow x_1+x_2=2a-2$
$\Leftrightarrow x_1+x_2=x_1x_2+5-2$
$\Leftrightarrow x_1+x_2-x_1x_2-3=0$

Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1,x_2 không phụ thuộc vào a là $x_1+x_2-x_1.x_2-3=0$.

Câu 5 (1,0 điểm):

Cho đường tròn $(O;R)$. Một cát tuyến xy cắt (O) tại E và F. Trên xy lấy điểm A nằm ngoài đoạn EF, vẽ hai tiếp tuyến AB và AC với (O). Gọi H là trung điểm EF.



a. Chứng tỏ 5 điểm A, B, C, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) tại B, C nên $\angle OBA = \angle OCA = 90^0$ (gt)

$\Rightarrow \angle OBA + \angle OCA = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow OBAC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OA (dhnb) (1)

Ta có H là trung điểm của EF (gt) $\Rightarrow OH \perp EF$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung).

$\Rightarrow \angle OHA = 90^0 \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính OA (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm A, B, C, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b. Đường thẳng BC cắt OA và OH lần lượt tại I và K. Chứng minh $OI.OA = OH.OK = R^2$

Ta có:

$OB = OC = R \Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của BC.

$AB = AC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow A$ thuộc đường trung trực của BC.

$\Rightarrow OA$ là trung trực của $BC \Rightarrow OA \perp BC$ tại I.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OAB ta có: $OI.OA = OB^2 = R^2$ (3)

Xét tam giác OIK và ΔOHA có:

$\angle OIK = \angle OHA = 90^0$

$\angle AOK$ chung

$\Rightarrow \Delta OIK \sim \Delta OHA\ (g.g)$

$\Rightarrow \dfrac{OI}{OH} = \dfrac{OK}{OA}$ (2 cạnh tương ứng) $\Rightarrow OI.OA = OH.OK$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow OI.OA = OH.OK = R^2$ (đpcm).

c. Chứng minh KE, KF là hai tiếp tuyến của đường tròn (O).

Theo ý b) ta có $OH.OK = R^2 = OE^2 \Rightarrow \dfrac{OH}{OE} = \dfrac{OE}{OK}$.

Xét ΔOEH và ΔOKE có:

$\angle EOK$ chung,

$\dfrac{OH}{OE} = \dfrac{OE}{OK}\ (cmt)$

$\Rightarrow OEH \sim \Delta OKE\ (c.g.c)$

$\Rightarrow \angle OHE = \angle OEK = 90^0$ (2 góc tương ứng).

$\Rightarrow KE$ là tiếp tuyến của (O) tại E.

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có

$OH.OK = R^2 = OF^2 \Rightarrow \dfrac{OH}{OF} = \dfrac{OF}{OK}$.

Xét ΔOFH và ΔOKF có:

$\angle FOK$ chung,

$\dfrac{OH}{OF} = \dfrac{OF}{OK}\ (cmt)$

$\Rightarrow OFH \sim \Delta OKF\ (c.g.c)$

$\Rightarrow \angle OHF = \angle OFK = 90^0$ (2 góc tương ứng).

$\Rightarrow KF$ là tiếp tuyến của (O) tại F.

Vậy KE, KF là hai tiếp tuyến của đường tròn (O) (đpcm).

----------HẾT----------