

**Câu 9.** (2 điểm). Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1}$  và  $Q = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

1) Chứng minh  $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ .

2) Tính giá trị của biểu thức  $Q$  khi  $x = 6 - 2\sqrt{5}$ .

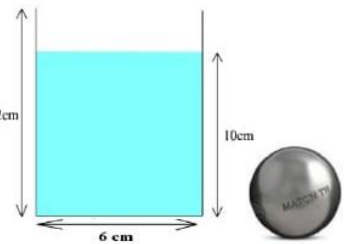
3) Tìm giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $A = Q\sqrt{x}$  có giá trị nguyên.

**Câu 10.** (2 điểm).

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình :

Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 800 sản phẩm. Sang tháng thứ hai tổ 1 vượt 15%, tổ 2 vượt 20% sản phẩm so với tháng thứ nhất do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 sản phẩm. Tính xem trong tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm.

2) Một cốc nước có dạng hình trụ có đường kính đáy bằng 6 cm chiều cao 12 cm và chứa một lượng nước cao 10 cm. Người ta thả từ từ 1 viên bi làm bằng thép đặc (không thấm nước) có thể tích là  $V = 4\pi(\text{cm}^3)$  vào cốc nước. Hỏi mực nước trong cốc lúc này cao bao nhiêu ?



**Câu 11.** (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} - 2y = 4 \\ \frac{2}{|x|} + y = 3 \end{cases}$$

2) Cho phương trình  $x^2 - 2x + m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số).

a) Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x = -1$ . Tìm nghiệm còn lại.

b) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức  $x_1^3 + x_2^3 = 8$ .

**Câu 12.** (3,5 điểm)

Cho đường tròn  $(O; R)$ , đường kính  $AC$  cố định. Kẻ tia tiếp tuyến  $Ax$  với đường tròn tại  $A$ . Trên tia  $Ax$  lấy điểm  $M$ , qua  $M$  kẻ tiếp tuyến  $MB$  với đường tròn ( $B \neq A$ ). Tiếp tuyến của đường tròn tại  $C$  cắt  $AB$  tại  $D$ . Nối  $OM$  cắt  $AB$  tại  $I$ , cắt cung nhỏ  $AB$  tại  $E$ .

1) Chứng minh tứ giác  $AOBM$  nội tiếp và  $OM \parallel BC$ .

- 2) Chứng minh tích  $AB \cdot AD$  không đổi khi  $M$  chuyển động trên  $Ax$ .  
 3) Tìm vị trí điểm  $M$  trên  $Ax$  để  $AOBE$  là hình thoi.  
 4) Chứng minh  $OD \perp MC$ .

**Câu 13.** (0,5 điểm). Cho biểu thức:  $B = (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)$ .  
 Với  $x > 0$ ,  $y > 0$  và  $x^2 + y^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $B$ .

### HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**Câu 1.** Cho biểu thức:  $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1}$  và  $Q = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

1) Chứng minh  $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ .

2) Tính giá trị của biểu thức  $Q$  khi  $x = 6 - 2\sqrt{5}$ .

3) Tìm giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $A = Q\sqrt{x}$  có giá trị nguyên.

#### Lời giải

1) Chứng minh  $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-1) - 6\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy  $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$  với  $x \geq 0; x \neq 1$ .

2) Tính giá trị của biểu thức  $Q$  khi  $x = 6 - 2\sqrt{5}$ .

ĐKXĐ:  $x \geq 0; x \neq 1$

Ta có  $x = 6 - 2\sqrt{5} = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5} - 1)^2$  (thỏa mãn ĐKXĐ)

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{5} - 1.$$

Thay  $\sqrt{x} = \sqrt{5} - 1$  vào biểu thức  $Q$  ta có:

$$Q = \frac{3}{\sqrt{5}-1+2} = \frac{3}{\sqrt{5}+1} = \frac{3(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{3\sqrt{5}-3}{4}$$

Vậy với  $x = 6 - 2\sqrt{5}$  thì  $Q = \frac{3\sqrt{5}-3}{4}$ .

3) Tìm giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $A = Q\sqrt{x}$  có giá trị nguyên.

ĐKXD:  $x \geq 0; x \neq 1; x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A = Q\sqrt{x} &= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x}+6-6}{\sqrt{x+2}} = \frac{3(\sqrt{x+2})-6}{\sqrt{x+2}} \\ &= 3 - \frac{6}{\sqrt{x+2}} \end{aligned}$$

Vì  $3 \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}$  nên để  $A = Q\sqrt{x}$  nhận giá trị nguyên cần  $\frac{6}{\sqrt{x+2}} \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow 6 : (\sqrt{x+2}) \text{ hay } \sqrt{x+2} \in U(6) = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$$

Do  $\sqrt{x} \geq 0$  nên  $\sqrt{x+2} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x+2} \in \{2; 3; 6\}$

$\sqrt{x+2}$	2	3	6
$x$	0	1	16

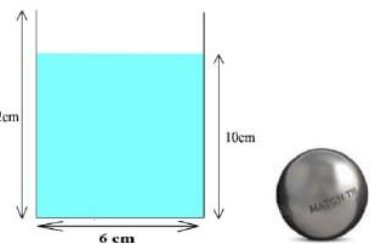
Vì  $x \geq 0; x \neq 1; x \in \mathbb{Z}$  nên  $x \in \{0; 16\}$  thì  $A = Q\sqrt{x}$  nhận giá trị nguyên.

**Câu 2.** 1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình :

Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 800 sản phẩm. Sang tháng thứ hai tổ 1 vượt 15%, Tổ 2 vượt 20% sản phẩm so với tháng thứ nhất do đó cuối tháng cả hai tổ sản xuất được 945 sản phẩm. Tính xem trong tháng thứ nhất mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu sản phẩm.

2) Một cốc nước có dạng hình trụ có đường kính đáy bằng 6 cm, chiều cao 12 cm và chứa một lượng nước cao 10 cm.

Người ta thả từ từ 1 viên bi làm bằng thép đặc (không thấm nước) có thể tích là  $V = 4\pi(\text{cm}^3)$  vào cốc nước. Hỏi mực nước trong cốc lúc này cao bao nhiêu ?



**Lời giải**

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình :

Gọi số sản phẩm tổ 1 làm được trong tháng thứ nhất là  $x$  (sản phẩm), số sản phẩm mà tổ 2 làm được trong tháng thứ nhất là  $y$  (sản phẩm) ( $x, y \in \mathbb{N}; x, y < 800$ )

Tháng thứ nhất hai tổ sản xuất được 800 sản phẩm, nên ta có phương trình:

$$x + y = 800 \quad (1)$$

Số sản phẩm tổ 1 làm được trong tháng thứ hai là  $115\%x = 1,15x$  (sản phẩm)

Số sản phẩm tổ 2 làm được trong tháng thứ hai là  $120\%y = 1,2y$  (sản phẩm)

Do cuối tháng hai cả hai tổ sản xuất được 945 sản phẩm nên ta có phương trình :

$$1,15x + 1,2y = 945 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y = 800 \\ 1,15x + 1,2y = 945 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 800 - y \\ 1,15(800 - y) + 1,2y = 945 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 800 - y \\ 0,05y = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 300 \\ y = 500 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy trong tháng 1 tổ 1 sản xuất được 300 sản phẩm, tổ 2 sản xuất được 500 sản phẩm.

2) Bán kính đáy của cốc nước là:  $6 : 2 = 3$  (cm).

Chiều cao của phần cốc không chứa nước:

$$h = 12 - 10 = 2 \text{ (cm)}$$

Thể tích phần không chứa nước:

$$V' = S.h = \pi r^2 h = 9\pi \cdot 2 = 18\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích viên bi là:  $V = 4\pi \text{ (cm}^3\text{)}$ .

Vì  $V' > V$  nên khi ta thả viên bi vào cốc nước thì nước không tràn ra ngoài.

Thể tích nước ban đầu là:  $\pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi \text{ (cm}^3\text{)}$ .

Thể tích khối nước và viên bi là:  $90\pi + 4\pi = 94\pi \text{ (cm}^3\text{)}$ .

Chiều cao của mực nước sau khi thả viên bi là:  $\frac{94\pi}{3^2 \cdot \pi} = \frac{94}{9}$  (cm).

Vậy chiều cao của mực nước sau khi thả viên bi là  $\frac{94}{9}$  cm.

**Câu 3. (2 điểm)**

1) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} - 2y = 4 \\ \frac{2}{|x|} + y = 3 \end{cases}$$

2) Cho phương trình  $x^2 - 2x + m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số).

a) Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x = -1$ . Tìm nghiệm còn lại.

b) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức  $x_1^3 + x_2^3 = 8$ .

**Lời giải**

1) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} - 2y = 4 \\ \frac{2}{|x|} + y = 3 \end{cases}$$

Điều kiện:  $x \neq 0$ .

Ta có: 
$$\begin{cases} \frac{1}{|x|} - 2y = 4 \\ \frac{2}{|x|} + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{|x|} - 2y = 4 \\ \frac{4}{|x|} + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{|x|} - 2y = 4 \\ \frac{5}{|x|} = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{|x|} - 2y = 4 \\ |x| = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(t/m) \\ y = -1 \\ x = -\frac{1}{2}(t/m) \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x_1; y_1) = \left(\frac{1}{2}; -1\right)$  và  $(x_2; y_2) = \left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ .

2) Cho phương trình  $x^2 - 2x + m + 3 = 0$  ( $m$  là tham số).

a) Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm  $x = -1$ . Tìm nghiệm còn lại.

$$\Delta' = 1^2 - (m+3) = -m - 2.$$

Để phương trình (1) có nghiệm  $x_1, x_2$  cần  $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$

Vì phương trình có nghiệm  $x = -1$  nên ta có:  $(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -6$  (thỏa mãn).

Áp dụng định lí Vi-ét ta có:  $x_1 + x_2 = \frac{-(-2)}{1} = 2 \Leftrightarrow -1 + x_2 = 2 \Leftrightarrow x_2 = 3$ .

Vậy  $m = -6$  thì phương trình  $x^2 - 2x + m + 3 = 0$  có một nghiệm là  $x = -1$  và nghiệm còn lại là  $x = 3$ .

Cách 2. Thay  $x = -1$  vào phương trình để tìm  $m$  sau đó xử dụng Vi-ét để tìm nghiệm còn lại.

b) Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn hệ thức  $x_1^3 + x_2^3 = 8$ .

Phương trình:  $x^2 - 2x + m + 3 = 0$  (1).

Để phương trình (1) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  cần  $m \leq -2$ .

Áp dụng định lí Vi – ét ta có: 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-(-2)}{1} = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m+3}{1} = m+3 \end{cases}$$

Theo bài ra:  $x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 = 8$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 8$$

$$\Leftrightarrow 2^3 - 3 \cdot 2(m+3) = 8$$

$$\Leftrightarrow 6(m+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow m+3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -3 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy  $m = -3$  thì phương trình  $x^2 - 2x + m + 3 = 0$  có hai nghiệm  $x_1, x_2$  thỏa mãn

$$x_1^3 + x_2^3 = 8$$

**Câu 3.** Cho đường tròn  $(O;R)$ , đường kính  $AC$  cố định. Kẻ tia tiếp tuyến  $Ax$  với đường tròn tại  $A$ . Trên tia  $Ax$  lấy điểm  $M$ , qua  $M$  kẻ tiếp tuyến  $MB$  với đường tròn ( $B \neq A$ ). Tiếp tuyến của đường tròn tại  $C$  cắt  $AB$  tại  $D$ . Nối  $OM$  cắt  $AB$  tại  $I$ , cắt cung nhỏ  $AB$  tại  $E$ .

- 1) Chứng minh tứ giác  $AOBM$  nội tiếp và  $OM \parallel BC$ .
- 2) Chứng minh tích  $AB \cdot AD$  không đổi khi  $M$  chuyển động trên  $Ax$ .
- 3) Tìm vị trí điểm  $M$  trên  $Ax$  để  $AOBE$  là hình thoi.
- 4) Chứng minh  $OD \perp MC$ .

**Lời giải**

Vì  $AM$  và  $BM$  là hai đường tiếp tuyến của  $(O; R)$  nên  $\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{OAM} + \widehat{OBM} = 180^\circ$ . Mà  $\widehat{OAM}; \widehat{OBM}$  là hai góc đối của tứ giác  $AOBM$

Vậy tứ giác  $AOBM$  nội tiếp.

Vì  $AM$  và  $BM$  là hai đường tiếp tuyến của  $(O; R)$  nên  $AM = BM$  (t/c của hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow M$  thuộc đường trung trực của đoạn  $AB$

$AO = BO \Rightarrow O$  thuộc đường trung trực của đoạn  $AB$ .

$\Rightarrow OM$  là đường trung trực của đoạn  $AB$ .

$\Rightarrow AB \perp OM$ . (1)

Mặt khác, góc  $\widehat{ABC}$  là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính  $AC$  nên

$\widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow AB \perp BC$ . (2)

Từ (1), (2) suy ra  $OM \parallel BC$ .

2) Chứng minh tích  $AB \cdot AD$  không đổi khi  $M$  chuyển động trên  $Ax$ .

Cách 1:

Vì  $CD$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O; R)$  nên  $CD \perp AC$ .

Xét  $\triangle ACD$  vuông tại  $C$ , có đường cao  $BC$ :  $AC^2 = AB \cdot AD$  (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$$\Leftrightarrow (AO + OC)^2 = AB \cdot AD$$

$$\Leftrightarrow (2R)^2 = AB \cdot AD$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot AD = 4R^2$$

Vì  $R$  không đổi nên  $AB \cdot AD$  không đổi khi  $M$  chuyển động trên  $Ax$ .

Cách 2:

Xét  $\triangle ACD$  và  $\triangle ABC$  có:

$\widehat{A} = \widehat{BAC}$  chung

$\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle ABC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Leftrightarrow AC^2 = AB \cdot AD \Leftrightarrow AB \cdot AD = 4R^2$$

Vì  $R$  không đổi nên  $AB \cdot AD$  không đổi khi  $M$  chuyển động trên  $Ax$ .

Cách 3:

Vì  $DC$  là tiếp tuyến của đường tròn nên  $\widehat{OCD} = 90^\circ$ .

$OM \perp AB \Rightarrow \widehat{OID} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{OCD} + \widehat{OID} = 180^\circ$

$\Rightarrow OIDC$  nội tiếp.

Vì tứ giác  $OIDC$  nội tiếp nên  $AI \cdot AD = AO \cdot AC$  (cái này phải chứng minh k được sử dụng ngay)  $\Leftrightarrow 2AI \cdot AD = 2AO \cdot AC$

$$\Leftrightarrow AB.AD = AC.AC$$

$$\Leftrightarrow AB.AD = 4R^2.$$

Vì  $AC$  không đổi nên  $AB.AD$  không đổi khi  $M$  chuyển động trên  $Ax$ .

3) Tìm vị trí điểm  $M$  trên  $Ax$  để  $AOBE$  là hình thoi.

Để  $AOBE$  là hình thoi thì cần  $AO = OB = BE = AE$  mà  $AO = OE$  nên cần có:

$AO = OE = AE$   $AO = OE = OB = BE = AE \Rightarrow AO = OE = AE$  hay  $\triangle AOE$  là tam giác đều  $\Rightarrow \widehat{AOE} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOE} = 60^\circ$ .

Tam giác vuông  $OAM$  Xét  $\triangle OAM$  vuông tại  $A$ , có:  $AM = OA \cdot \tan 60^\circ$

$$AM = OA \cdot \tan 60^\circ = R\sqrt{3} \text{ (Tỉ số lượng giác của góc nhọn).}$$

Vậy để tứ giác  $AOBE$  là hình thoi thì  $M$  nằm trên đường tiếp tuyến của đường tròn tại  $A$  mà  $AM = R\sqrt{3}$  hay  $M$  là giao điểm của tia  $Ax$  và đường tròn  $(A; R\sqrt{3})$ .

4) Chứng minh  $OD \perp MC$ .

Xét  $\triangle AMO$  và  $\triangle CAD$  có:  $\widehat{AMO} = \widehat{BAC}$  (cùng phụ với góc  $\widehat{MAB}$ )

$$\widehat{MAO} = \widehat{ACD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle AMO \sim \triangle CAD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AO}{CD} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{CO}{CD} \text{ (3)}$$

Bổ sung:

$$\text{Xét } \triangle MAC, \text{ vuông tại } A, \text{ có: } \tan \widehat{ACM} = \frac{AM}{AC} \text{ (4)}$$

$$\text{Xét } \triangle OCD, \text{ vuông tại } C, \text{ có: } \tan \widehat{ODC} = \frac{OC}{CD} \text{ (5)}$$

$$\text{Từ (3), (4) và (5), suy ra: } \tan \widehat{ACM} = \tan \widehat{ODC} \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{ODC}$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{ACM} = \tan \widehat{ODC} \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{ODC}$$

$$\text{Mà } \widehat{ACM} + \widehat{MCD} = 90^\circ \quad \widehat{ACM} + \widehat{MCD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ODC} + \widehat{MCD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ODC} + \widehat{MCD} = 90^\circ$$

Gọi  $K$  là giao điểm của  $OD$  và  $MC$ .

$$\text{Xét } \triangle KCD \text{ có } \widehat{KDC} + \widehat{KCD} = 90^\circ \quad \widehat{KDC} + \widehat{KCD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CKD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CKD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow OD \perp MC.$$

**Câu 4.** (0,5 điểm). Cho biểu thức:  $B = (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)$ .

Với  $x > 0$ ,  $y > 0$  và  $x^2 + y^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của  $B$ .

**Lời giải**



$$\begin{aligned}
 B &= (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right) = 2+x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \\
 &= 2+x+y+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2y}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \\
 &= 2+\left(x+\frac{1}{2x}\right)+\left(y+\frac{1}{2y}\right)+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).
 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có:

$$x + \frac{1}{2x} \geq 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{1}{2x}} = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$y + \frac{1}{2y} \geq 2 \cdot \sqrt{y \cdot \frac{1}{2y}} = \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{x \cdot y}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô - si ta có:

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow \sqrt{xy} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \sqrt{2} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta được:

$$2 + \left(x + \frac{1}{2x}\right) + \left(y + \frac{1}{2y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 + 3\sqrt{2}.$$

Vậy  $\text{Min} B = 4 + 3\sqrt{2}$ .

Dấu đẳng thức đồng thời xảy ra khi và chỉ khi: 
$$\begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{2x} \\ y = \frac{1}{2y} \\ x^2 + y^2 = 1; x > 0, y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$