Đề tuyển sinh lớp 10 môn Toán (Hệ chuyên) 2021 Trường phổ thông năng khiếu TP. HCM

Câu 1. Cho hệ $\begin{cases} \sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}=2 \\ x+y=m \end{cases}$

a) Giải hệ khi m=7

b) Tìm m sao cho hệ đã cho có nghiệm,

Câu 2. Cho $M=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$;

$N=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$;

$K=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$
và a, b, c; a + b; a +c ; b + c ≠ 0.

a) Chứng minh rằng nếu $MK=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ thì N = 0

b) Cho M = K = 4, N = 1. Tính abc.

Câu 3: Cho n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n (n \geq 5)$ thoả mãn

$\begin{cases} x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \\ x_1+x_2+\ldots+x_n=1 \end{cases}$

a) chứng minh rằng: Nếu $x_n \geq \frac{1}{3}$ thì $x_1+x_2 \leq x_n$

b) chứng minh rằng: nếu $x_1 \leq \frac{2}{3}$ thì tồn tại $k \epsilon N^*$, k < n sao cho $\frac{1}{3} \leq x_1+x_2+\ldots+x_k \leq \frac{2}{3}$

Câu 4:

a) Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho $(2n+1)^3+1 \vdots 2^{2021}$

b) Cho tất cả số tự nhiên n, số nguyên tố p sao cho

$\frac{2n+2}{p}$ và $\frac{4n^2+2n+1}{p} \epsilon \mathbb{Z}$

Chứng minh rằng với n và p tìm được, các số nguyên trên không phải là số chính phân

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông góc tại A; E thuộc AB, F thuộc AC sao cho EF song song BC. Dựng đường tròn I đường kính EF cắt BF; CE tại M và N. Gọi D là giao của BF và CE; DH vuông góc EF (H thuộc EF).

a) Chứng minh AD đi qua I và (HMN) qua I

b) Gọi K; L là hình chiếu vuông góc của E; F lên BC. EM và FN cắt BC tại P và Q. Chứng minh rằng AEPL; AFQK nội tiếp và $\frac{BP.BL}{CQ.CK}$ không đổi khi E; F di động.

c) Nếu KF và EL cắt nhau tại một điểm thuộc (I) thì EM; FN cắt nhau tại một điểm thuộc BC.

Bài 6. Cho tập A gồm 26 phần tử. Xét N (N ≥ 6) tập con B1, B2 , ….. , BN phân biệt của tập A, mỗi tập con có đúng 5 phần tử.

a) Biết rằng hai tập bất kỳ trong các tập Bộ đều có đúng một phần tử chung và không có phần tử nào của tập A xuất hiện trong tất cả các tập Bi, chứng minh rằng không có phần tử nào của tập A xuất hiện đồng thời trong 6 tập Bi nào đó,

b) Biết rằng hai tập bất kỳ trong các tập Bi đều có đúng hai phần tử chung và không có phần tử nào của tập A xuất hiện trong tất cả các tập Bi, hỏi trong các tập B1, B2, ..., BN có thể có nhiều nhất bao nhiêu tập sao cho các tập này có đúng 2 phần tử chung?

Đáp án Đề tuyển sinh lớp 10 môn Toán (Hệ chuyên) 2021 Trường phổ thông năng khiếu TP. HCM

So đáp án đề thi tuyển sinh lớp 10 môn Toán (Hệ chuyên) của Trường phổ thông năng khiếu TP. HCM (PTNK) năm 2021 được cập nhật chính thức tại đây

Bài 1. Cho hệ $\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}=2\\ x+y=m\end{cases}$.

1) Giải hệ khi $m=7$.

2) Tìm m sao cho hệ có nghiệm.

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge 1\end{cases}$.

1) Khi $m=7$ hệ trở thành $\begin{cases}\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}=2\\ x+y=7\end{cases}$.

Từ $\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}=2$ suy ra $4=x-2+y-1+2\sqrt{(x-2)(y-1)}$

hay $7=x+y+2\sqrt{(x-2)(y-1)}\ge x+y=7$. dấu "=" xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}x=2\\ y=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=5\\ x=6\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\{(2;5),(6;1)\}$.

2) Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x-2}\\ b=\sqrt{y-1}\end{cases}$ $(a,b\ge 0)$. Khi đó, hệ trở thành $\begin{cases}a+b=2\\ a^2+b^2=m-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\ ab=\dfrac{7-m}{2}\end{cases}$ (*) .

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi hệ (*) có nghiệm $(a;b)$ sao cho $\begin{cases}a\ge 0\\ b\ge 0\end{cases}$.

Hệ (*) có nghiệm khi và chỉ khi $(a+b)^2\ge 4ab$ hay $m\ge 5$.

Để $\begin{cases}a\ge 0\\ b\ge 0\end{cases}$ dẫn đến $\begin{cases}a+b\ge 0\\ ab\ge 0\end{cases}$ hay $\begin{cases}2>0\\ \dfrac{7-m}{2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le 7$.

Vậy để hệ phương trình có nghiệm thì $5\le m\le 7$.

Bài 2:

Bài 2

Cho $M=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}; N=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$ và $K=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ với $a,b,c,a+b,b+c,c+a$ khác 0.

1) Chứng minh rằng nếu $MK=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ thì $N=0$.

2) Cho $M=K=4, N=1,$ tính abc.

Suy ra $16=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}+1$ hay $a^2+b^2+c^2=15abc$

Và $M=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$ nên $ab+bc+ca=4abc$.

Mặt khác, $K+3=\ a+b+c\ .N$, do đó $a+b+c=7$.

Nên $49=\ a+b+c\ ^2=a^2+b^2+c^2+2\ ab+bc+ca\ =15abc+8abc=23abc$.

Do đó, $abc=\frac{49}{23}$.

Bài 3. Cho n số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \ge 5)$ thỏa mãn $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ và $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$.

1) Chứng minh rằng nếu $x_n \ge \frac{1}{3}$ thì $x_1 + x_2 \le x_n$.

2) Chứng minh rằng nếu $x_n \le \frac{2}{3}$ thì tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$ sao cho $\frac{1}{3} \le x_1 + x_2 + ... + x_k \le \frac{2}{3}$.

1) Giả sử $x_1 + x_2 > \frac{1}{3}$. Chú ý $n \ge 5$ và $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ nên $x_3 + x_4 \ge x_2 + x_1 > x_n \ge \frac{1}{3}$, đương nhiên từ x_2 trở đi các số đều dương. Khi đó, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_n > \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ (vô lý). Do đó, $x_1 + x_2 \le \frac{1}{3} \le x_n$.

2) Trường hợp 1: $\frac{1}{3} \le x_n \le \frac{2}{3}$ khi đó, $\frac{1}{3} \le x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n-1} = 1 - x_n \le \frac{2}{3}$, ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: $x_n < \frac{1}{3}$ suy ra $x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_n < \frac{1}{3}$.

Ta xét dãy $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, ..., x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}$. Rõ ràng luôn tồn tại k để $x_1 + x_2 + ... + x_k \ge \frac{1}{3}$.

Và ta sẽ gọi k là chỉ số nhỏ nhất có thể (tất nhiên $k > 1$) thỏa mãn: $x_1 + x_2 + ... + x_k \ge \frac{1}{3}$.

Do đó, $x_1 + x_2 + ... + x_k \le \frac{2}{3}$ vì nếu $x_1 + x_2 + ... + x_k > \frac{2}{3}$ thì $x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} > \frac{2}{3} - x_k > \frac{1}{3}$ (vì $x_k < \frac{1}{3}$)

Suy ra tồn tại chỉ số $k - 1 < k$ mà $x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} > \frac{1}{3}$ (điều này vô lý với tính nhỏ nhất của k)

Suy ra ta có điều phải chứng minh.

Bài 4 (1,5 điểm):

a) Ta có $(2n+1)^3 + 1 = 2(n+1)((2n+1)^2 - (2n+1) + 1)$ và lưu ý $(2n+1)^2 - (2n+1) + 1$ là số lẻ nên $(2n+1)^3 + 1$ chia hết cho 2^{2021} khi và chỉ khi $n+1$ chia hết cho 2^{2020}, từ đó $n = k.2^{2020} - 1$ với $k \in \mathbb{N}^*$ tuỳ ý.

b) Giả sử phản chứng cả hai số đã cho là số chính phương. Từ giả thiết dễ thấy p là số lẻ. Thế thì viết $2n + 2 = px^2, 4n^2 + 2n + 1 = py^2$ với $x, y \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $(2n+2)(4n^2 + 2n + 1) = (pxy)^2$. Khai triển thì

$$(2n+1)^3 = (pxy - 1)(pxy + 1).$$

Vì vế trái lẻ nên $pxy - 1, pxy + 1$ đều lẻ, kéo theo $(pxy - 1, pxy + 1) = 1$. Đẳng thức trên cho ta $pxy - 1, pxy + 1$ là hai lập phương đúng, tức là $pxy - 1 = a^3$ và $pxy + 1 = b^3$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $a < b$. Suy ra $b^3 - a^3 = 2$ hay tương đương $(b-a)(b^2 + ba + a^2) = 2$ là vô lí vì $b^2 + ab + a^2 > 3$.

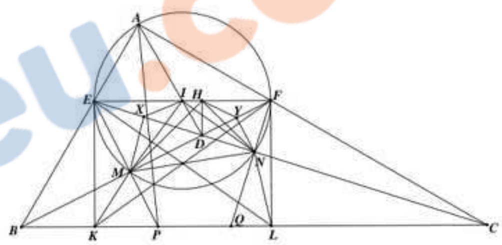
Bài 5:

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, lấy các điểm E,F trên AB,AC sao cho $EF \parallel BC$. Dựng đường tròn (I) đường kính EF cắt BF,CE lần lượt tại M,N. Gọi D là giao điểm của BF,CE. Kẻ $DH \perp EF$.

1. Chứng minh: AD qua I và đường tròn ngoại tiếp tam giác (HMN) qua I.
2. Gọi K,L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E,F lên BC, EM,FN cắt BC lần lượt tại P,Q. Chứng minh: $\dfrac{BP.BL}{CQ.CK}$ không đổi khi E,F di động.
3. Chứng minh: Nếu KF,EL cắt nhau trên (I) thì EM,FN cắt nhau trên BC.

Hướng dẫn:

1. Xét hình thang $BEFC$ có 2 đường chéo cắt nhau tại D. Theo bổ đề hình thang thì AI đi qua D.

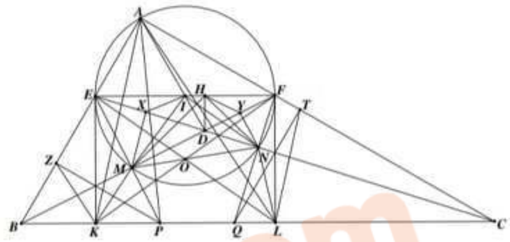


Do M,N nằm trên đường tròn đường kính EF nên $\widehat{EMF} = \widehat{ENF} = 90^0$ dẫn đến

Gọi X,Y lần lượt là trung điểm của DE,DF thì các tam giác cân XEM,YFN đồng dạng nên suy ra $\widehat{MXD} = \widehat{NYD}$ dẫn đến $MXYN$ nội tiếp. Ta có: $\widehat{XHE} = \widehat{XEH} = \widehat{XNI}$ nên $XIHN$ nội tiếp, tương tự $IHYM$ nội tiếp. Từ đó suy ra 6 điểm M,X,I,H,Y,N nằm trên 1 đường tròn.

2. Do $AEMF$ và $BAFL$ nội tiếp nên $\widehat{BEM} = \widehat{BFA} = \widehat{BLA}$ suy ra tứ giác $AEPL$ nội tiếp dẫn đến $BP.BL = BE.BA$, tương tự ta cũng có: $CQ.CK = CF.CA$ suy ra $\dfrac{BP.BL}{CQ.CK} = \dfrac{BE}{CF}.\dfrac{BA}{CA}$. Theo định lý Thales ta có: $\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{CF}{CA} \Rightarrow \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{AB}{AC}$ do đó $\dfrac{BP.BL}{CQ.CK} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$ không đổi.

3. Khi KF,EL cắt nhau tại điểm O trên (I) thì $\widehat{EOF} = 90^0$ dẫn đến $EKLF$ là hình vuông.



Ta chứng minh: $P \equiv Q$ tức là:

$BP + CQ = BC$ tức là chứng minh:

$\frac{BP}{BC} + \frac{CQ}{BC} = 1$. Gọi Z, T lần lượt là chân đường cao hạ từ P lên AB, Q lên AC. Ta có $AEPL$ nội tiếp và $\Delta BKZ \backsim \Delta BEP$ (g.g) nên

$\widehat{BZK} = \widehat{BPE} = \widehat{BAL}$ nên $ZK \parallel AL$.

Theo định lý Thales ta có: $\frac{BP}{BC} = \frac{BZ}{BA} = \frac{BK}{BL}$, tương tự ta có $\frac{CQ}{BC} = \frac{CT}{CA} = \frac{CL}{CK}$ nên ta sẽ chứng minh: $\frac{BK}{BL} + \frac{CL}{CK} = 1 \Leftrightarrow BK.CK + BL.CL = BL.CK$ tức là:

$BK.(CL + LK) + (BK + KL).CL = (BK + KL).(CL + KL)$

$\Leftrightarrow BK.CL + BK.LK + BK.CL + KL.CL = BK.CL + BK.KL + KL.CL + KL^2 \Leftrightarrow KL^2 = BK.CL$ mà $EFLK$ là hình vuông nên $KL = EF = FL = EK$. Vì vậy ta cần chứng minh: $KE.FL = BK.CL$ nhưng điều này luôn đúng do $\Delta BKE \backsim \Delta FLC$ (g.g).

Câu 6.

Thầy Võ Quốc Bá Cẩn (giáo viên trường THCS Archimedes, Hà Nội) và Lê Viết Ân (giáo viên trường Phổ thông Năng khiếu) giải:

a) Giả sử tồn tại một phần tử X của tập A sao cho x thuộc sáu tập Bi nào đó. Không mất tính tổng quát, giả sử x ∈ B1, x ∈ B2, x ∈ B3, x ∈ B4, x ∈ B5 và x + B6. Vì x không thể thuộc tất cả các tập Bi nên tồn tại một tập Bi nào đó không chứa x. Không mất tính tổng quát, giả sử Bi không chứa x.

Đặt Bi = {a, b, c, d, e}. Ta thấy Bi có đúng một phần tử chung với từng tập trong các tập B1, B2, B3, B4, B5, B6. Không mất tính tổng quát, giả sử a là phần tử chung của B7 và B1. Khi đó, a không thể là phần tử chung của B7 và B2 (vì nếu không B1 và B2 sẽ có hai phần tử chung là a và x). Do đó, B7 và B2 sẽ có phần tử chung khác a. Không mất tính tổng quát, giả sử b là phần tử chung của B7 và B2.

Cứ như vậy, ta có thể giả sử c là phần tử chung của B7 và B3. d là phần tử chung của B7 và B4, e là phần tử chung của B7 và B5. Lúc này, Bộ7 và B6 không có phần tử chung nào, mâu thuẫn.

Vậy không có phần tử nào của tập A xuất hiện đồng thời trong sáu tập Bi nào đó.

b) Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng với hai phần tử x, y phân biệt bất kỳ của tập A thì có không quá bốn tập Bi chứa hai phần tử này. Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại năm tập Bi nào đó chứa x và y. Không mất tính tổng quát, giả sử B1, B2, B3, B4, B5, cùng chứa x và y. Khi đó, theo giả thiết, tồn tại một tập Bị không chứa x. Không mất tính tổng quát, giả sử B6 không chứa x. Xét các trường hợp sau.

• Trường hợp 1: B6 chứa y. Đặt B6 = {y, a, b, c, dở. Ta thấy B6 có đúng hai phần tử chung với từng tập trong các tập B1, B2, B3, B4, B5. Không mất tính tổng quát, giả sử a là phần tử chung của B6 và B1. Khi đó, a không thể là phần tử chung của B6 và B2, (vì nếu không B1 và B2 sẽ có ba phần tử chung là a, x, y). Do đó, B6 và B2 sẽ có phần tử chung khác a. Không mất tính tổng quát, giả sử b là phần tử chung của B6 và Ba. Cứ như vậy, ta có thể giả sử c là phần tử chung của Ba và B4, A là phần tử chung của B6 và B4.

Lúc này, B6 và B5, chỉ có đúng một phân tử chung, mâu thuẫn.

• Trường hợp 2: B, không chứa y. Đặt B = {a, b, c, d, e}. Ta thấy B6 và B có đúng hai phần tử chung, không mất tính tổng quát, giả sử là a và b. Khi đó, a, b không thể thuộc bất kỳ tập hợp nào trong các tập B2, B3, B4, B (vì nếu không sẽ có hai tập có ba phần tử chung). Do đó, hai phần tử chung của B6 và B2 khác a và b. Không mất tính tổng quát, giả sử hai phần tử chung đó là c và d. Hoàn toàn tương tự, ta thấy c và d không thể thuộc B3. Suy ra B6 và B 3 có không quá một phần tử chung, mâu thuẫn.

Như vậy, có không quá bốn tập Bi sao cho các tập này có đúng hai phần tử chung. Bây giờ, xét sáu tập hợp:

B1 = {a,b,c,d,e), B2 = {a,b, f, g, h), B3 = {a,b, i, j, k).

B4 = {a,b, l, m, n). B5 = {a, c, f. 1.), B6 = {b, c, f. j. m).

Ta thấy sáu tập hợp này thỏa mãn yêu cầu đề bài, đồng thời bốn tập hợp B1, B2, B3, B4, có hai phần tử chung. Vậy có nhiều nhất bốn tập có đúng hai phần tử chung.