



Câu I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+1}{1-x}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$.
- 2) Rút gọn biểu thức B.
- 3) Đặt $P = B : A$. Tìm các giá trị nguyên của x để $\sqrt{P} < \frac{1}{2}$

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một khu vườn có chiều dài hơn chiều rộng 6 m. Nếu tăng chiều dài thêm 2 m và tăng chiều rộng thêm 4 m thì diện tích khu vườn tăng thêm 80 m². Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn.

2) Một chiếc mũ giấy có dạng hình nón, với độ dài đường sinh bằng 30 cm và đường kính đáy bằng 15 cm. Tính diện tích giấy để làm mũ (không kể rìa, mép, phần thừa). Lấy $\pi \approx 3,14$.

Câu III (2,5 điểm)

1) Giải phương trình $x^4 + 3x^2 - 28 = 0$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng (d): $y = (m-1)x + 2$ (m là tham số) và parabol (P): $y = x^2$

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số m.

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 > x_2$ và $|2x_1| - |x_2| = 2 + x_1$.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là tiếp điểm) và cát tuyến ABC không qua O (tia AC nằm giữa AN và AO; B nằm giữa A và C).

1) Chứng minh bốn điểm A, M, O, N thuộc cùng một đường tròn.

2) Qua M kẻ đường thẳng song song với AC, cắt đường tròn tại điểm thứ hai E. NE cắt BC tại I.

Chứng minh $\widehat{MON} = 2\widehat{NIB}$ và I là trung điểm của BC.

3) MN cắt BC tại K. Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

Câu V (0,5 điểm) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = abc$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab}$.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên:..... Số báo danh:

- Lưu ý:** - Điểm toàn bài để lẻ đến 0,25.
 - Học sinh giải cách khác đúng cho điểm tối đa.
 - Câu IV: học sinh vẽ sai hình trong phạm vi câu nào, không chấm điểm câu đó.

Câu	Nội dung	Điểm		
I (2đ)	1 (0,5)	Thay $x=4$ (tmđk) vào $A: \frac{2}{\sqrt{4}-1}$	0,25	
		Tính được $A=2$. Kết luận	0,25	
	2 (1,0)	$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{x+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$	0,25	
		$= \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}-1-x-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$	0,25	
		$= \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$	0,25	
		$= \frac{2}{\sqrt{x}+1}$	0,25	
	3 (0,5)	Tính $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$. Để \sqrt{P} có nghĩa, $P \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \geq 0$. Tìm được $x \geq 1$. Kết hợp điều kiện $x \neq 1 \Rightarrow x > 1$	0,25	
		$\sqrt{P} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow P < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1} < 0$ Chỉ ra được $3\sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{5}{3} \Leftrightarrow x < \frac{25}{9}$ Kết hợp điều kiện $1 < x < \frac{25}{9}$ và x là số nguyên $\Rightarrow x=2$.	0,25	
	II (2đ)	1 (1,5)	Gọi chiều dài khu vườn là x (m), chiều rộng là y (m) ($x > y, x > 6, y > 0$)	0,25
			Chiều dài hơn chiều rộng 6 m $\Rightarrow x - y = 6$ (1)	0,25
Chiều dài sau khi tăng 2 m: $x+2$ (m) Chiều rộng sau khi tăng 4 m: $y+4$ (m)			0,25	
Diện tích tăng thêm 80 m ² : $\Rightarrow (x+2)(y+4) - xy = 80 \Leftrightarrow 4x + 2y = 72$ (2)			0,25	
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + 2y = 72 \end{cases}$			0,25	
	Giải hệ được $\begin{cases} x = 14 \\ y = 8 \end{cases}$ (tmđk)	0,25		

Câu	Nội dung	Điểm
	Kết luận, chiều dài của mảnh vườn là 14 m, chiều rộng là 8 m	0,25
2 (0,5)	Diện tích giấy làm mũ: $\pi Rl \approx 3,14 \times \frac{15}{2} \times 30$ (HS viết dấu "=" vẫn cho đủ điểm) $= 706,5 \text{ cm}^2$. (Các đáp số khác 706,5 không cho điểm: VD $225\pi, 706,8\dots$)	0,25 0,25
1 (1,0)	$\Leftrightarrow (x^2 + 7)(x^2 - 4) = 0$ TH1: $x^2 = -7$. Vô nghiệm TH2: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ Tập nghiệm $S = \{-2; 2\}$	0,25 0,25 0,25
III (2,5)	Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 = (m-1)x + 2 \Leftrightarrow x^2 - (m-1)x - 2 = 0$ $\Delta = (m-1)^2 + 8 > 0, \forall m \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi m. Vậy (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt với mọi giá trị của tham số m	0,25 0,25 0,25
2b (0,75)	Nhận xét: $x_1 x_2 = -2 < 0$ và $x_1 > x_2 \Rightarrow x_1 > 0 > x_2$. Vậy $ 2x_1 = 2x_1$ và $ x_2 = -x_2$ $\Rightarrow 2x_1 + x_2 = 2 + x_1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2$. Theo hệ thức Vi-ét: $x_1 + x_2 = m-1$ $\Rightarrow m-1 = 2 \Leftrightarrow m = 3$. Vậy $m = 3$.	0,25 0,25 0,25
IV (3,0)	<div style="text-align: center;"> </div> <p>Học sinh vẽ hình đúng hết câu 1 được 0,25 điểm</p> <p>AM là tiếp tuyến, suy ra $\widehat{AMO} = 90^\circ$. AN là tiếp tuyến, suy ra $\widehat{ANO} = 90^\circ$. Xét tứ giác AMON: $\widehat{AMO} + \widehat{ANO} = 180^\circ$ và 2 góc đối diện nhau. Suy ra tứ giác nội tiếp. Kết luận: Vậy 4 điểm M, A, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.</p> <p>$ME \parallel AC \Rightarrow \widehat{MEN} = \widehat{NIB}$ (đồng vị). $\widehat{MON} = 2\widehat{MEN}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung MN) $\Rightarrow \widehat{MON} = 2\widehat{NIB}$ AM, AN là hai tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow OA$ là phân giác của góc MON (tc) $\Rightarrow \widehat{NOA} = \widehat{NIA} \left(= \frac{1}{2} \widehat{MON} \right) \Rightarrow$ tứ giác AOIN nội tiếp.</p>	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

Câu	Nội dung	Điểm
3	$\Rightarrow \widehat{AIO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$. $OI \perp BC$ tại $I \Rightarrow I$ là trung điểm BC	0,25
	Gọi H là giao điểm của MN và AO . Chứng minh $AI.AK = AH.AO$	0,25
	Chứng minh $AB.AC = AH.AO (= AM^2) \Rightarrow AI.AK = AB.AC$	0,25
	I là trung điểm BC , H là giao điểm của MN và AO $\Rightarrow BI = IC \Rightarrow AB = AI - IB; AC = AI + IC \Rightarrow AB + AC = 2AI$	0,25
	$\Rightarrow \frac{AB+AC}{2}.AK = AB.AC \Rightarrow \frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$ (đpcm)	0,25
V (0,5)	Áp dụng bất đẳng thức Cô - si: $\frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{a}{2a\sqrt{bc}} = \frac{1}{2\sqrt{bc}}; \frac{b}{b^2+ca} \leq \frac{1}{2\sqrt{ca}}; \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}$	0,25
	$\Rightarrow P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab+bc+ca}{abc}$ $\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{2}$ khi $a=b=c=3$.	0,25