

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi: 20/5/2021

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không kể thời gian phát đề)

Bài I (2 điểm). Cho biểu thức $A = \frac{-2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+3}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

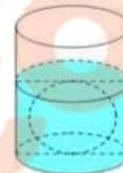
- 1) Tính giá trị biểu thức A khi $x = \frac{9}{16}$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm các giá trị nguyên dương của m để tồn tại giá trị x sao cho $AB = m^2 + m$.

Bài II (2,5 điểm).

- 1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một đội công nhân theo kế hoạch phải trồng 70 hecta rừng trong một số tuần. Do mỗi tuần trồng vượt mức 5 hecta so với kế hoạch nên đã trồng được 75 hecta và hoàn thành sớm hơn kế hoạch 2 tuần. Hỏi theo kế hoạch mỗi tuần đội công nhân đó phải trồng bao nhiêu hecta rừng?

2) Bạn Khánh thả một viên bi sắt hình cầu vào một bình nước hình trụ có chứa nước thì mực nước trong bình dâng lên 1 cm. Biết rằng đáy của bình nước hình trụ có bán kính đáy là 6 cm. Hỏi bán kính viên bi sắt là bao nhiêu cm?



Bài III (2 điểm).

- 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - \frac{4}{y} = -1 \\ 3x^2 + \frac{2}{y} = 4 \end{cases}$$

2) Cho đường thẳng $(d) y = 2mx - 2m + 1$ (m là tham số) và Parabol $(P) y = x^2$

- a) Tìm giao điểm của đường thẳng (d) với trục hoành khi $m = -\frac{1}{2}$.
- b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ $x_1; x_2$ không âm và biểu thức $A = \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 2}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài IV (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi (d) là tiếp tuyến của (O) tại B . Lấy điểm I khác B bất kì trên (d) . AI cắt đường tròn (O) tại E , gọi H là trung điểm của AE và OH cắt đường thẳng (d) ở K , IO cắt AK ở D .

- 1) Chứng minh $OBIH$ là tứ giác nội tiếp.
- 2) Chứng minh $\widehat{BIO} = \widehat{HBE}$ và DI là phân giác của \widehat{HDB} .
- 3) Xác định vị trí điểm I trên đường thẳng (d) để tổng $AI + 2AE$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài V (0,5 điểm). Tìm các số nguyên không âm x, y thỏa mãn điều kiện sau:

$$x^2y + y^2 + x^2 - 3xy - 3x + 2y + 2 = 0$$

----- HẾT -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Ý	Lời giải	Điểm
Bài I	1)	$A = \frac{-2\sqrt{\frac{9}{16}} + 6}{\sqrt{\frac{9}{16}} + 1} = \frac{18}{7}$ <p>Vậy $A = \frac{18}{7}$ khi $x = \frac{9}{16}$.</p>	0,25 0,25
	2)	$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+3}{x-9} \quad (x \geq 0; x \neq 9)$ $= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x-3})}{x-9} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+3})}{x-9} - \frac{3x+3}{x-9}$ $= \frac{-3\sqrt{x-3}}{x-9}$	0,25 0,5 0,25
	3)	$BA = \frac{-3\sqrt{x-3}}{x-9} \cdot \left(\frac{-2\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}} \right) = \frac{3(\sqrt{x+1})}{x-9} \cdot \frac{2(\sqrt{x-3})}{\sqrt{x+1}} = \frac{6}{\sqrt{x+3}}$ <p>Vi $\sqrt{x+3} \geq 3 \Rightarrow AB \leq 2$ Vậy $m^2 + m \leq 2 \Leftrightarrow (m-1)(m+2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 1$ Vì m nguyên dương nên suy ra $m = 1$. Với $m = 1$ suy ra $x = 0$ thỏa mãn. Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm</p>	0,25 0,25
Bài II	1)	<p>Gọi số héc ta rừng đội công nhân trồng được trong mỗi tuần theo kế hoạch là x héc ta ($0 < x < 70$)</p> <p>Thời gian theo kế hoạch đội công nhân trồng xong là $\frac{70}{x}$ (tuần)</p> <p>Thực tế, số héc ta rừng đội công nhân trồng được trong mỗi tuần là $x+5$ héc ta</p> <p>Thời gian thực tế đội công nhân đã làm là $\frac{75}{x+5}$ (tuần)</p> <p>Vi đội đã hoàn thành sớm hơn kế hoạch 2 tuần nên ta có phương trình</p> $\frac{70}{x} - \frac{75}{x+5} = 2$ $\Leftrightarrow \frac{70(x+5) - 75x}{x(x+5)} = 2$ $\Leftrightarrow 70(x+5) - 75x = 2x(x+5)$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 15x - 350 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 & (tm) \\ x = -17,5 & (loại) \end{cases}$ <p>Vậy theo kế hoạch mỗi tuần đội công nhân đó phải trồng 10 héc ta rừng.</p>	0,25 0,25 0,25 0,25 0,5 0,25 0,25
	2)	<p>Thể tích nước dâng lên 1 cm trong ống nước hình trụ là</p> $V = h\pi R^2 = 36\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$ <p>Thể tích bi sắt thả vào đúng bằng thể tích phần nước dâng lên. Gọi r là bán kính của bi sắt hình cầu, ta có</p>	0,25

		$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Leftrightarrow r = 3 \text{ cm}$ <p>Vậy bán kính của bi sắt hình cầu là 3 cm.</p>	0,25
Bài III	1)	<p>Đk: $y \neq 0$</p> <p>Đặt $x^2 = a; \frac{1}{y} = b$</p> <p>Ta có hệ $\begin{cases} a-4b=-1 \\ 3a+2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4b=-1 \\ 6a+4b=8 \end{cases}$</p> <p>Giải hệ ta được $\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=2 \end{cases}$</p> <p>Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-1; 2); (1; 2)$</p>	0,25 0,25 0,25 0,25
	2).a	<p>Phương trình hoành độ giao điểm của (d) với trục hoành là $2mx - 2m + 1 = 0$.</p> <p>Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.</p> <p>Vậy tọa độ giao điểm của d với trục hoành là $(2; 0)$.</p>	0,25 0,25
	2).b	<p>Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$</p> <p>Để thấy $a + b + c = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = 2m - 1$. Hoành độ không âm nên suy ra $2m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$.</p> <p>Ta có: $A = \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 2} = \frac{m}{2(m^2 - m + 1)} = \frac{1}{2\left(m + \frac{1}{m} - 1\right)}$</p> <p>Theo BĐT Cô si ta có: $m + \frac{1}{m} \geq 2 \Rightarrow A \leq \frac{1}{2}$.</p> <p>Vậy A đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $m = 1$.</p>	0,25 0,25
	Bài IV		0,25

	<p>1) Vì H là trung điểm của AE nên Ta có: $OHI = 90^\circ$ (Tính chất đường kính và dây cung) $OBI = 90^\circ$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow OHI + OBI = 180^\circ$. $\Rightarrow OBIH$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).</p>	<p>0,25 0,25 0,25</p>
	<p>2) +) Chứng minh $BIO = HBE$ $BIO = BHO$ (cùng chắn cung OB của đường tròn ngoại tiếp $OBIH$) $BE \perp AE \Rightarrow OH \parallel BE$ Vậy $BIO = HBE$ (so le trong) Suy ra $BIO = HBE$ +) Chứng minh DI là phân giác của góc HDB Để thấy O là trực tâm tam giác AKI. Vì vậy các tứ giác $AHOD, BODK, AHBK$ là các tứ giác nội tiếp Ta có: $HDO = HAO$ (cùng chắn cung HO của đường tròn ngoại tiếp $AHOD$) $HAO = HKB$ (cùng chắn cung HB của đường tròn ngoại tiếp $AHBK$) $HKB = ODB$ (cùng chắn cung OB của đường tròn ngoại tiếp $BODK$) Vậy $HDO = ODB$. Suy ra DI là phân giác của góc HDB</p>	<p>0,25 0,25 0,25 0,25</p>
	<p>3) Theo BĐT Cauchy ta được: $AI + 2AE \geq 2\sqrt{2AI \cdot AE} = 2\sqrt{2AB^2} = 2\sqrt{2 \cdot 4R^2} = 4R\sqrt{2}$ Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AI = 2AE = 2R\sqrt{2}$ Mà $AI = AE + EI$ Nên E là trung điểm AI. Xét $DABI$, Ta có: BE vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên suy ra $DABI$ vuông cân tại B. Vậy $BI = AB = 2R$ Vậy I nằm trên d sao cho $IB = 2R$.</p>	<p>0,25 0,25 0,25 0,25</p>
<p>Bài V</p>	<p>Từ giả thiết ta có: $-x^2 + 3x = \frac{y^2 + 2y + 2}{y+1} = y+1 + \frac{1}{y+1} \geq 2$ $\Rightarrow (x-1)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$ Vì x nguyên nên $x = 1$ và $x = 2$. Khi đó $y+1 + \frac{1}{y+1} = 2 \Leftrightarrow y = 0$. Vậy có 2 cặp (x, y) thỏa mãn là $(1, 0)$ và $(2, 0)$.</p>	<p>0,25 0,25</p>

Lưu ý:

- Điểm toàn bài để lên đến 0,25.

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.

- Bài IV: Thí sinh vẽ sai hình trong phạm vi câu nào thì không tính điểm câu đó.