Ôn tập chương 3 Giải tích 12

Bài 1 (trang 126 SGK Giải tích 12):

a) Phát biểu định nghĩa nguyên hàm của hàm số f(x) trên một khoảng.

b) Nêu phương pháp tính nguyên hàm từng phần. Cho ví dụ minh họa.

Lời giải:

a) Cho hàm số f(x) xác định trên K.

Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trên K

$\Leftrightarrow F'(x) = f(x)\ \forall x \in K$.

b)

+ Phương pháp nguyên hàm từng phần:

Nếu hai hàm số u = u(x) và v = v(x) có đạo hàm liên tục trên K thì:

$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$

Hay viết gọn: $\int udv = uv - \int vdv$.

+ Ví dụ:

Tính $I = \int x.e^x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int x.e^x dx$$

$$= x.e^x - \int e^x dx$$

$$= x.e^x - e^x + C$$

Bài 2 (trang 126 SGK Giải tích 12):

a) Phát biểu định nghĩa tích phân của hàm số f(x) trên một đoạn.

b) Nêu các tính chất của tích phân. Cho ví dụ minh họa.

Lời giải:

a) Cho hàm số y = f(x) liên tục trên [a; b].

F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a; b].

Hiệu số F(b) – F(a) được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số f(x)

Kí hiệu là:

b) Các tính chất :

$$\int_a^a f(x)dx = 0\ ;$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx;$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Bài 3 (trang 126 SGK Giải tích 12):

Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = (x-1)(1-2x)(1-3x);$

b) $f(x) = \sin 4x.\cos^2 2x\ ;$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}\ ;$

d) $f(x) = (e^x - 1)^3.$

Lời giải:

a) Ta có: (x – 1)(1 – 2x)(1 – 3x)

$= (x - 1)(6x^2 - 5x + 1)$

$= 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1.$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int \left(6x^3 - 11x^2 + 6x - 1\right)dx$$

$$= 6.\frac{x^4}{4} - 11.\frac{x^3}{3} + 3x^2 - x + C$$

$$= \frac{3x^4}{2} - \frac{11.x^3}{3} + 3x^2 - x + C$$

b) $\sin 4x.\cos^2 2x$

$$= \sin 4x.\frac{\cos 4x + 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.\sin 4x.\cos 4x + \frac{1}{2}.\sin 4x$$

$$= \frac{1}{4}.\sin 8x + \frac{1}{2}.\sin 4x$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{4}.\sin 8x + \frac{1}{2}.\sin 4x \right) dx$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{8}.(-\cos 8x) + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.(-\cos 4x) + C$$

$$= -\frac{\cos 8x}{32} - \frac{\cos 4x}{8} + C$$

c) $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1-x+1+x}{(1-x)(1+x)}$$

$$=\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}(\ln|1+x|-\ln|1-x|)+C$$

$$=\frac{1}{2}.\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

d) $f(x)=(e^x-1)^3$

$=e^{3x}-3.e^{2x}+3.e^x-1$

$$\Rightarrow \int f(x)dx=\int(e^{3x}-3.e^{2x}+3.e^x-1)dx$$

$$=\frac{1}{3}.e^{3x}-\frac{3}{2}.e^{2x}+3.e^x-x+C$$

Bài 4 (trang 126 SGK Giải tích 12):

Tính:

a) $\int (2-x).\sin x\,dx$;

b) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$;

c) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$;

d) $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}dx$;

e) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}dx$;

g) $\int \frac{1}{(1+x)(2-x)}dx$.

Lời giải:

a) Đặt $\begin{cases} u = 2 - x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Theo công thức tích phân từng phần:

$$\int (2-x).\sin x dx$$

$$= (2-x).(-\cos x) - \int \cos x dx$$

$$= (x-2).\cos x - \sin x + C$$

b) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}} dx$

$$= \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 2.x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{-1}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{2}{5}.x^{\frac{5}{2}} + 2.\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}} + 2.x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sqrt{x}.\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \right) + C$$

c) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx$

$$= \int \frac{\left(e^x+1\right)\left(e^{2x}-e^x+1\right)}{e^x+1} dx$$

$$= \int \left(e^{2x} - e^x + 1 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}.e^{2x} - e^x + x + C.$$

d) $\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx$

$$= \int \frac{1}{\left[\sqrt{2}.\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{2.\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

$$= \frac{1}{2}.\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C$$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} dx$

$$= \int \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx$$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} dx$$

$$= \int \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}.(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}.(x+1)\sqrt{x+1} - \frac{2}{3}.x\sqrt{x} + C$$

g) $\int \frac{1}{(1+x).(2-x)}dx$

$$= \int \frac{1+x+2-x}{3(1+x).(2-x)}dx$$

$$= \int \frac{1+x}{3(1+\text{x}).(2-x)}dx + \int \frac{2-x}{3(1+\text{x}).(2-x)}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{2-x}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}dx$$

$$= \frac{-1}{3}.\ln|2-x| + \frac{1}{3}\ln|1+x| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right| + C$$

Bài 5 (trang 127 SGK Giải tích 12):

Tính:

a) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$;

b) $\int_1^{64} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

c) $\int_0^2 x^2.e^{3x}dx$;

d) $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin 2x}dx$

Lời giải:

a) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$

$= \int_0^3 \frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}}dx$

$= \int_0^3 \left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx$

$= \int_0^3 \left((x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{-1}{2}}\right)dx$

$= \left[\frac{2}{3}.(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2.(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_0^3$

$= \frac{4}{3} - \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{8}{3}.$

b) $\int_{1}^{64} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

$= \int_{1}^{64} \left(x^{\frac{-1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} \right) dx$

$= \left(\frac{3}{2}.x^{\frac{2}{3}} + \frac{6}{7}.x^{\frac{7}{6}} \right) \Bigg|_{1}^{64}$

$= \frac{936}{7} - \frac{33}{14} = \frac{1839}{14}$.

c) Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{3x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \frac{1}{3}.e^{3x} \end{cases}$

$\Rightarrow \int_{0}^{2} x^2.e^{3x}dx$

$= \frac{1}{3}.x^2.e^{3x} \Big|_{0}^{2} - \frac{2}{3}\int_{0}^{2} x.e^{3x}dx$

$= \frac{4}{3}.e^6 - \frac{2}{3}.\int_0^2 x.e^{3x}dx$.

Tính $I_1 = \int_0^2 x.e^{3x}dx$

Đặt $\begin{cases} u_1 = x \\ dv_1 = e^{3x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du_1 = dx \\ v_1 = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$

$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{3}.x.e^{3x}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{3}.e^{3x}dx$

$= \frac{2}{3}.e^6 - \left(\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.e^{3x}\right)\Big|_0^2$

$= \frac{2}{3}.e^6 - \frac{1}{9}.e^6 + \frac{1}{9}$

$= \frac{5}{9}.e^6 + \frac{1}{9}$.

$\Rightarrow \int_0^2 x^2.e^{3x}dx = \frac{4}{3}.e^6 - \frac{2}{3}.\left(\frac{5}{9}e^6 + \frac{1}{9}\right)$

$$= \frac{26}{27}e^6 - \frac{2}{27}$$

d) $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2.\sin x.\cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} |\sin x + \cos x|\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left|\sqrt{2}.\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$= \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}.\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \sqrt{2}.\left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$- \sqrt{2}.\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$= \sqrt{2}.\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} - \sqrt{2}.\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= \left(\sqrt{2} + 1\right) - \left(1 - \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Bài 6 (trang 127 SGK Giải tích 12):

Tính:

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x.\sin^2 x dx$;

b) $\int_{-1}^{1} \left|2^x - 2^{-x}\right| dx$;

c) $\int_{1}^{2} \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2} dx$;

d) $\int_{0}^{2} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$;

e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx$;

g) $\int_{0}^{\pi} (x + \sin x)^2 dx$.

Lời giải:

a) Ta có: $\cos 2x.\sin^2 x$

$= \cos 2x.\dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$= \dfrac{1}{2}.\cos 2x - \dfrac{1}{2}.\cos^2 2x$

$= \dfrac{1}{2}.\cos 2x - \dfrac{1}{4}.(\cos 4x + 1)$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x.\sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}.\cos 4x - \frac{1}{4} \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\sin 2x - \frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\sin 4x - \frac{1}{4}x \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-\pi}{8}$$

b) $\int_{-1}^{1} \left|2^x - 2^{-x}\right| dx$

$$= \int_{-1}^{0} \left|2^x - 2^{-x}\right| dx + \int_{0}^{1} \left|2^x - 2^{-x}\right| dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(2^{-x} - 2^x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(2^x - 2^{-x}\right) dx$$

$$= \left(\frac{-2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln 2} \right) \Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right) \Bigg|_{0}^{1}$$

$$= \left(\frac{-2}{\ln 2} + \frac{5}{2\ln 2} \right) + \left(\frac{5}{2\ln 2} + \frac{-2}{\ln 2} \right)$$

$$= \frac{1}{\ln 2}$$

c) $\int_1^2 \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2} dx$

$$= \int_1^2 \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x^2} dx$$

$$= \int_1^2 \left(x + 6 + \frac{11}{x} + \frac{6}{x^2} \right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 6x + 11.\ln|x| - \frac{6}{x} \right) \Bigg|_1^2$$

$$= \frac{21}{2} + 11\ln 2.$$

d) $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x - 3}dx$

$= \int_0^2 \frac{1}{(x-3)(x+1)}dx$

$= \int_0^2 \frac{1}{4}.\frac{x+1-(x-3)}{(x-3)(x+1)}dx$

$= \frac{1}{4}.\int_0^2 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \frac{1}{4}.\left(\ln|x-3| - \ln|x+1|\right)\Big|_0^2$

$= \frac{1}{4}.\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|\Big|_0^2$

$= \frac{1}{4}.\ln\frac{1}{3} - \frac{1}{4}.\ln 3$

$= \frac{1}{4}\left[\ln\frac{1}{3} - \ln 3\right] = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{9}$

$= \frac{-1}{2}\ln 3.$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x.\cos x\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin 2x)dx$

$=\left(x-\frac{1}{2}.\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\pi}{2}+1.$

g) $\int_0^{\pi}(x+\sin x)^2dx$

$= \int_0^{\pi}\left(x^2+2x.\sin x+\sin^2 x\right)dx$

$= \int_0^{\pi}x^2dx + 2.\int_0^{\pi}x.\sin xdx + \int_0^{\pi}\sin^2 xdx$.

+ Tính $I_1 = \int_0^{\pi}x^2dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}$

+ Tính $I_2 = \int_0^{\pi}x.\sin xdx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$\Rightarrow I_2 = (-x.\cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}-\cos xdx$

$= \pi + \int_0^{\pi}\cos xdx = \pi + \left(\sin x\Big|_0^{\pi}\right) = \pi$.

+ Tính $I_3 = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

$= \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$

Vậy $\int_0^{\pi} (x + \sin x)^2 dx$

$= \frac{\pi^3}{3} + 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{3} + \frac{5\pi}{2}.$

Bài 7 (trang 127 SGK Giải tích 12): Xét hình phẳng D giới hạn bởi y=2√(1-x^2) và y=2(1-x)

a) Tính diện tích hình D

b) Quay hình D xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.

Lời giải:

a) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$$2\sqrt{1-x^2}=2(1-x)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=1-x$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2=1-2x+x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy diện tích hình D là:

$$S=\int_0^1\left|2\sqrt{1-x^2}-2(1-x)\right|dx$$

$$=2\int_0^1\left(\sqrt{1-x^2}+x-1\right)dx$$

Đặt $x=\sin t\ \left(0\le t\le \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow dx=\cos t\,dt;$$

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\left|\cos t\right|=\cos t;$$

Đổi biến:

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow S = 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \sin t - 1).\cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos^2 t + 2\sin t.\cos t - 2\cos t\right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1 + \sin 2t - 2.\cos t) dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}.\sin 2t - \frac{1}{2}.\cos 2t - 2.\sin t + x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1.$$

b)

+ Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y = 2\sqrt{1-x^2} \\ x = 0; x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ quay quanh trục Ox tạo thành là:

$$V_1 = \pi\int_0^1 \left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi.\int_0^1 4.\left(1-x^2\right)dx$$

$$= 4\pi.\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8\pi}{3}$$

+ Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} y = 2(1-x) \\ x = 0; x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ quay quanh trục Ox tạo thành là:

$$V_2 = \pi.\int_0^1 \left[2.(1-x)\right]^2 dx$$

$$= 4\pi.\int_0^1 \left(1-2x+x^2\right)dx$$

$$= 4\pi.\left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4\pi}{3}$$

+ Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng D quay quanh trục Ox là:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{4\pi}{3}$$