Bài I (2 điểm)

1. Cho $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Hãy tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$

với $x \geq 0$

2. Rút gọn biểu thức

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{11(2\sqrt{x}-1)+8}{x+2\sqrt{x}-3}$$

với $x \geq 0; x \neq 1$

3. Tìm các giá trị của x để biểu thức P = A.B nhận giá trị nguyên.

Bài II (2 điểm)

1. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc sau 12 ngày thì hoàn thành. Nếu hai đội làm chung trong 3 ngày, sau đó đội II đi làm việc khác và đội I làm thêm 7 ngày thì được $\dfrac{7}{12}$ công việc. Hỏi mỗi đội làm một mình thì sau bao lâu hoàn thành công việc?

2. Một dụng cụ làm bằng thủy tinh dùng để chứa dung dịch có dạng hình nón với độ dài đường sinh là 15 cm và diện tích xung quanh là 135π cm^2. Hãy tính thể tích của dụng cụ đó (bỏ qua bề dày của dụng cụ).

Bài III (2,5 điểm)

1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ mx + y = 4 \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình khi m = 3.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x: y) thỏa mãn x = |y|.

2. Chứng minh đường thẳng (d): y = mx + m + 1 luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của m.

3. Tìm m để phương trình: $x + (3+m)\sqrt{x} - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 4.

Bài IV (3 điểm)

| Cho đường tròn (O; R), đường kính AB và CD không vuông góc với nhau sao cho $AC < AD$. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt AC, AD lần lượt tại E và F.

1. Chứng minh BE.BF = $4R^2$.

2. Chứng minh tứ giác CDFE nội tiếp.

3. Gọi O' là trung điểm của EF, AO' cắt CD tại K.

Chứng minh AO' vuông góc với CD và $\dfrac{KC}{KD} = \dfrac{BF}{BE}$

Bài V (0,5 điểm) Cho a, b, c > 0 và ab + bc + ca = 1.

Chứng minh:

$$\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \leq 2(a+b+c)$$

---Hết---

Bài I:

1.

Ta có:

$x = 3 - 2\sqrt{2} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} - 1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$

Thay vào A ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{2}-1+3}{\sqrt{2}-1+2} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$$

với $x \geq 0$

2.

Với $x \geq 0; x \neq 1$, ta có:

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{11(\sqrt{x}-1)+8}{x+2\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{11\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 11\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{2x-5\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{(2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$$

3.

Với $x \geq 0; x \neq 1$, ta có:

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}.\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = 2 - \frac{7}{\sqrt{x}+2}$$

Để P = A.B nguyên $\Leftrightarrow \dfrac{7}{\sqrt{x}+2}$ nguyên, mà $\sqrt{x}+2 > 0$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x}+2 = 7 \\ \sqrt{x}+2 = 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 25\ (tm) \\ \sqrt{x} = -1\ (loại) \end{array}\right.$

KL....

Bài II:

1.

Gọi số ngày mỗi đội nếu làm việc một mình thì hoàn thành công việc lần lượt là A, B (ngày, A, B > 0)

Mỗi ngày, mỗi đội sẽ làm được số công việc: $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}$

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} 12\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)=1 \\ 3\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)+\frac{7}{A}=\frac{7}{12} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{A}+\frac{12}{B}=1 \\ \frac{10}{A}+\frac{3}{B}=\frac{7}{12} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{A}=\frac{1}{21} \\ \frac{1}{B}=\frac{1}{28} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=21 \\ B=28 \end{cases} \text{ (tm đk)}$$

KL....

2.

$S_{xq}=\pi rl=135\pi \Rightarrow r=\frac{135}{l}=9$ (cm).

Thể tích dụng cụ đó là:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}=\frac{1}{3}\pi.9^2\sqrt{15^2-9^2}=324\pi\ (cm^3)$$

KL....

Bài III:

1.

a.

Với m = 3, ta có:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+y=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{11}{5} \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ mx+y=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ m(5-2y)+y=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ y(1-2m)=4-5m \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq \dfrac{1}{2}$.

Để $x=|y| \Leftrightarrow 5-2y=|y| \geq 0 \Rightarrow y \leq \dfrac{5}{2}$

Với $x \leq \dfrac{5}{2}$, ta có:

$$5-2y=|y| \Leftrightarrow (5-2y)^2=y^2$$

$$\Leftrightarrow (5-3y)(5-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{5}{3}\ (tm) \\ y=5\ (loại) \end{array}\right.$$

Thay $y=\dfrac{5}{3}$ vào hệ ta có:

$\dfrac{5}{3}(1-2m)=4-5m \Leftrightarrow m=\dfrac{7}{5}$ (tm đkxđ).

Thử lại và kết luận ....

2.

Ta thấy phương trình đường thẳng (d) tương đương với:

$m(x+1)+1-y=0$

Ta thấy điểm M(-1;1) luôn thuộc (d) ⇒ (d) luôn đi qua điểm cố định với mọi giá trị của m là M(-1;1).

3.

$x+(3+m)\sqrt{x}-m=0$ (*)

Để (*) có nghiệm khác 4 tức là:

$4+(3+m)\sqrt{4}-m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -10$

Để (*) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$X^2+(3+m)X-m=0$

có hai nghiệm phân biệt > 0, tức là:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2>0\\ x_1x_2>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3+m)^2+4m=m^2+10m+9>0\\ -3-m>0\\ -m>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(m+9)>0\\ m<-3\\ m<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>-1\\ m<-9\end{array}\right.\\ m<-3\\ m<0\end{cases}$$

$\Rightarrow m<-9; m\neq -10$

KL....

1.

Vì EF là tiếp tuyến tại B của (O) ⇒ OB ⊥ EF hay AB ⊥ EF.

có $\angle CAD = 90°$ (góc nội tiếp chắn đường kính).

Áp dụng hệ thức lượng trong △AEF vuông tại A có đường cao AB, ta có:

$BE.BF = AB^2 = 4R^2$ (đpcm).

2.

Ta có $\angle ACD = \angle ABD$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AD) $= 90° - \angle DBF = \angle BFD$

hay $\angle BFD = \angle ACD = 180° - \angle ECD \Rightarrow \angle EFD + \angle ECD = 180°$ ⇒ tứ giác CDFE nội tiếp (đpcm).

3.

Xét △AEF vuông tại A có trung tuyến AO' ⇒ AO' = EO' = FO' ⇒ △EO'A cân tại O' ⇒ ∠O'EA = ∠O'AE.

Xét △AKC và △ABF, ta có:

$\angle KAC = \angle O'EA = 90° - \angle EAB = \angle BAF$

$\angle ACK = \angle AFB$ (cmt)

Suy ra △AKC ∽ △ABF ⇒ ∠AKC = ∠ABF = 90° ⇒ AO' ⊥ CD (đpcm).

và $\dfrac{KC}{BF} = \dfrac{AC}{AF}$ (1)

Chứng minh tương tự ta có △AKD ∽ △ABE ⇒ $\dfrac{KD}{BE} = \dfrac{AD}{AE}$ (2)

Lại có △ACD ∽ △AFE ⇒ $\dfrac{AC}{AF} = \dfrac{AD}{AE}$ (3)

Từ (1) (2) và (3) ta có $\dfrac{KC}{KD} = \dfrac{BF}{BE}$ (đpcm).

Bài V:

Ta có:

$$\sqrt{a^2+1}=\sqrt{a^2+ab+bc+ca}=\sqrt{(a+b)(a+c)}$$

Áp dụng BĐT AM-GM cho (a+b) và (a+c) ta có:

$$2\sqrt{(a+b)(a+c)}\le(a+b)+(a+c)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+1}\le\frac{(a+b)+(a+c)}{2}$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{b^2+1}\le\frac{(b+c)+(b+a)}{2}$$

$$\sqrt{c^2+1}\le\frac{(c+a)+(c+b)}{2}$$

Cộng vế theo vế 3 Bất đẳng thức trên, ta có:

$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le 2(a+b+c)$ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

-/-