GIẢI TOÁN 12 BÀI 3: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

Bài 1 (trang 121 SGK Giải tích 12):

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y=x^2; y=x+2$

b) $y=|\ln x|; y=1$

c) $y=(x-6)^2; y=6x-x^2$

Lời giải

a) Giả sử đường thẳng y=x+2 cắt parabol $y=x^2$ tại A và B.

x_A, x_B là các nghiệm của phương trình:

$x^2 = x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1; x = 2$

Xét hàm $f(x) = x^2 - x - 2$, $f'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f'(x)		-		-		+		+	
f(x)	$+\infty$	↘	0	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$

Theo bảng biến thiên ta có: trên đoạn [-1;2] thì $x^2 - x - 2 < 0$

Do đó: $|x^2 - (x + 2)| = -x^2 + x + 2$

Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{x_A}^{x_B} |x^2 - (x+2)|dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}(đvdt)$$

b) Hoành độ các giao điểm là:

ln|x|=1 ⇔x=1/e ;x=e

Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} [1 + lnx]dx + \int_{1}^{e} (1 - lnx)dx$$

$$= x(lnx - 1)|_{\frac{1}{e}}^{1} - x(lnx - 1)|_{\frac{1}{e}}^{1} = e + \frac{1}{e} - 2\ (đvdt)$$

c) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$(x-6)^2=6x-x^2$

⇔ (x-6)(2x-6)=0

⇔x=3 ;x=6

Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{3}^{6} [6x - x^2 - (x - 6)^2]dx$$

$$= \int_{3}^{6} (-2x^2 + 18x - 36)dx$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 9x^2 - 36x\right)\Big|_{3}^{6}$$

$$= -36 + 45 = 9(đvdt)$$

Bài 2 (trang 121 SGK Giải tích 12):

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2+1$, tiếp tuyến với đường này tại điểm M(2; 5) và trục Oy.

Lời giải:

Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = x^2 + 1$ tại điểm M(2; 5) là :

y'=y' (2)[x - 2] + 5 ⇔ y = 4x - 3

Điểm M(2; 5) thuộc đường $y = x^2 + 1$ vì $5 = 2^2 + 1$

Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_0^2 |x^2 + 1 - (4x - 3)|dx$$

$$= \int_0^2 |x^2 - 4x + 4|dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}(đvdt)$$

Bài 3 (trang 121 SGK Giải tích 12):

Parabol y=x2/2 chia hình tròn có tâm tại gộc toạ độ, bán kính 2√2 thành hai phần. Tìm tỉ số diện tích của chúng.

Lời giải:

Phương trình đường tròn:

$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{8 - x^2}$

Phía trên trục hoành, đường tròn có phương trình:

$y = \sqrt{8 - x^2}$

Do tính đối xứng nên diện tích giới hạn bởi

$y = \frac{x^2}{2}$ và $y = \sqrt{8 - x^2}$ bằng hai lần diện tích

giới hạn bởi các đường đó và trục tung.

Hoành độ giao điểm của hai đường là :

$\frac{x^2}{2} = \sqrt{8 - x^2} \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$S = 2\int_0^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\int_0^2 \sqrt{8 - x^2} dx - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$

Đặt $x = 2\sqrt{2} sint$, ta có:

$2\int_0^2 \sqrt{8 - x^2} dx = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$

$= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + cos2t) dt = [8t + 4sin2t]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4$

Diện tích hình giữa hai đường cong là:

$S = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}$

Diện tích phần còn lại của hình tròn là:

$s_1 = \pi(2\sqrt{2})^2 - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}$

Tỉ số diện tích hai phần là:

$\left[2\pi + \frac{4}{3}\right] : \left[6\pi - \frac{4}{3}\right] = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$

Bài 4 (trang 121 SGK Giải tích 12):

Tính thể tích khối tròn xoay đó hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh Ox:

a) $y = 1 - x^2; y = 0$

b) $y = cosx; y = 0; x = 0; x = \pi$

c) $y = tanx; y = 0; x = 0; y = \frac{\pi}{4}$

Lời giải

a) Hoành độ giao điểm là: $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x \right) \Big|_{-1}^{1}$$

$$= 16 \frac{\pi}{15} (đvdt)$$

b) Ta có: $V = \pi \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 + cos2x) dx$

$$= \frac{\pi}{2} \left(x + \frac{sin2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

c) Ta có: $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$

$$= \pi (tanx - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi - \pi^2}{4}$$

Bài 5 (trang 121 SGK Giải tích 12):

Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox.

Đặt góc POM = a’, OM = R (0 =< a < π/3, R > 0).

Gọi V là khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó xung quanh trục Ox.

a) Tính thể tích của V theo a và R.

b) Tìm a sao cho thể tích của V lớn nhất.

Lời giải:

a) Ta có: OP = Rcosa.PM = Rsina

Phương trình đường thẳng OM là y = xtana

Vậy thể tích khối tròn xoay là:

Lời giải

a) Ta có: OP = Rcos α, $PM = Rsin\ \alpha$

Phương trình đường thẳng OM là $y = xtan\ \alpha$

Vậy thể tích khối tròn xoay là:

$$V = \pi \int_0^{Rcos\ \alpha} x^2 \tan^2 \alpha dx = \pi \tan^2 \frac{x^3}{3}\Big|_0^{Rcos\ \alpha}$$

$$V = \frac{\pi R^3}{3} \sin^2 \alpha . \cos \alpha = \frac{\pi R^3}{3} [\cos \alpha - \cos^3 \alpha] (đvdt)$$

b) Thể tích V là một hàm số của α, với:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi R^3}{3} . [\sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha]$$

$$V'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 3 \cos^2 \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Bảng biến thiên của $V(\alpha) với\ 0 \le \alpha < \frac{\pi}{3}$

α	$-\infty$ $+\infty$	$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
V'(α)	+	-
V(α)	-∞ ↗	↘ $-\infty$

Vậy thể tích V lớn nhất khi α là góc có $\cos \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.