GIẢI BÀI 2: TÍCH PHÂN LỚP 12

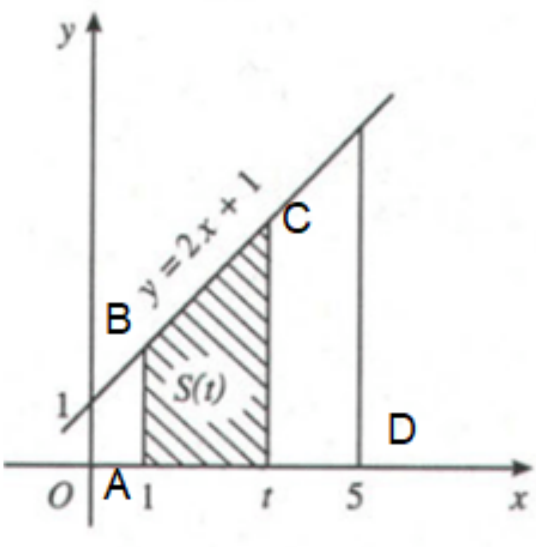
Trả lời câu hỏi SGK Toán Giải tích lớp 12 Bài 2 (Chương 3):

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 2 trang 101:

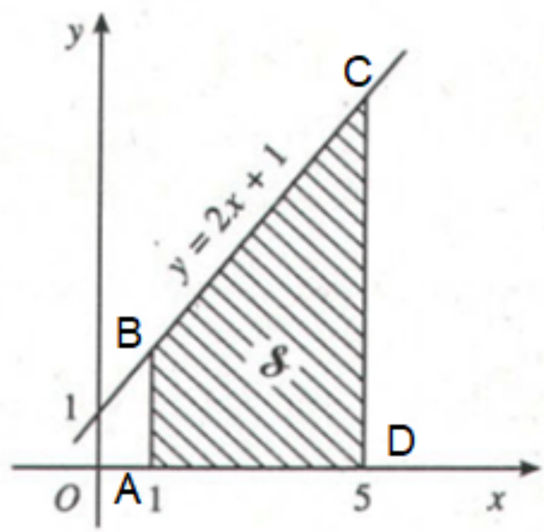
Kí hiệu T là hình thang vuông giới hạn bởi đường thẳng y = 2x + 1, trục hoành và hai đường thẳng x = 1, x = t (1 ≥ t ≥ 5) (H.45).

1. Tính diện tích S của hình T khi t = 5 (H.46).

2. Tính diện tích S(t) của hình T khi x ∈ [1; 5].



Hình 45



Hình 46

Lời giải:

1. Kí hiệu A là điểm có tọa độ (1,0), D là điểm có tọa độ (5,0). B, C lần lượt là giao điểm của đường thẳng x = 1 và x = 5 với đường thẳng y = 2x + 1.

- Khi đó B và C sẽ có tọa độ lần lượt là (1,3) và (5,11).

- Ta có: AB = 3, CD = 11, AD = 4. Diện tích hình thang:

2. Kí hiệu A là điểm có tọa độ (1,0), D là điểm có tọa độ (5,0). B, C lần lượt là giao điểm của đường thẳng x = 1 và x = 5 với đường thẳng y = 2x + 1.

- Khi đó ta có B (1,3) và C(t, 2t + 1).

- Ta có AB = 3, AD = t – 1, CD = 2t + 1.

- Khi đó diện tích hình thang:

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 2 trang 104:

Giả sử f(x) là hàm số liên tục trên đoạn [a; b], F(x) và G(x) là hai nguyên hàm của f(x). Chứng minh rằng F(b) – F(a) = G(b) – G(a), (tức là hiệu số F(b) – F(a) không phụ thuộc việc chọn nguyên hàm).

Lời giải:

- Vì F(x) và G(x) đều là nguyên hàm của f(x) nên tồn tại một hằng số C sao cho: F(x) = G(x) + C

- Khi đó F(b) – F(a) = G(b) + C – G(a) – C = G(b) – G(a).

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 2 trang 106:

Hãy chứng minh các tính chất 1 và 2.

Lời giải:

Tính chất 1: Ta có $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

Đặt $F(x) = \int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$

$$\int_a^b kf(x)dx = F(x)|_b^a = k\int_a^b f(x)dx.$$

Tính chất 2: Ta có $\int f(x)dx \pm \int g(x)\,dx = \int [f(x) \pm g(x)dx]$

Nên tương tự như trên ta có:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 2 trang 108:

Cho tích phân:

1. Tính I bằng cách khai triển $(2x+1)^2$.

2. Đặt u = 2x + 1. Biến đổi biểu thức $(2x+1)^2dx$ thành g(u)du.

3. Tính $\int_{u(0)}^{u(1)} g(u)\,du$ và so sánh kết quả với I trong câu 1.

1. $I = \int_0^1 (2x+1)^2\,dx = \int_0^1 (4x^2+4x+1)\,dx$

$= \left(\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x\right)\Big|_0^1 = \frac{13}{3}.$

2. Vì u = 2x +1 nên du = 2dx. Ta có $(2x+1)^2dx = u^2\frac{du}{2}$.

3. u(1) = 3, u(0) = 1. Ta có:

$$\int_{u(0)}^{u(1)} g(u)\,du = \int_1^3 u^2\frac{du}{2} = \frac{u^3}{6}\Big|_1^3 = \frac{13}{3}$$

Vậy $\int_{u(0)}^{u(1)} g(u)\,du = I = 3.$

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 2 trang 110:

a) Hãy tính $\int (x+1)e^x dx$ bằng phương pháp tính nguyên hàm từng phần.

b) Từ đó tính:

Lời giải:

a) $\int(x+1)e^x = e^x(x+1) + \int e^x dx = e^x(x+1) + e^x = e^x x + 2e^x$.

b) $\int_0^1 (x+1)e^x dx = (e^x x + 2e^x)|_0^1 = 3e - 2$.

Giải bài tập SGK Toán Giải tích lớp 12 Bài 2 (Chương 3):

Bài 1 (trang 112 SGK Giải tích 12):

Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{(1-x)^2}\,dx$;

b) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$;

c) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x(x+1)}dx$;

d) $\int\limits_{0}^{2} x(x+1)^2\,dx$;

e) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1-3x}{(x+1)^2}dx$;

g) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x.\cos 5x\,dx$.

Lời giải:

a) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{(1-x)^2}\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{2}{3}}\,dx$

$= -\frac{3}{5}.(1-x)^{\frac{5}{3}}\Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$= -\frac{3}{5}.\sqrt[3]{(1-x)^5}\Big|_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{3}{5}.\left(\sqrt[3]{\frac{243}{32}} - \sqrt[3]{\frac{1}{32}}\right)$

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$

$= (-1).\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

c) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x+1-x}{x(x+1)}dx$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \left(\ln|x| - \ln|x+1|\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$= \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{3} = \ln 2.$$

d) $\int_{0}^{2} x(x+1)^2\,dx$

$$= \int_{0}^{2}\left(x^3 + 2x^2 + x\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} + 2.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{2}$$

$$= \frac{34}{3} - 0 = \frac{34}{3}.$$

e) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1-3x}{(x+1)^2}dx$

$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{4-3(1+x)}{(x+1)^2}dx$

$= \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{4}{(x+1)^2} - \frac{3}{x+1}\right)dx$

$= \left(\frac{-4}{x+1} - 3.\ln|x+1|\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}$

$= \left(-\frac{4}{3} - 3\ln 3\right) - \left(\frac{-8}{3} - 3\ln\frac{3}{2}\right)$

$= \frac{4}{3} - 3.\ln 2$.

g) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x.\cos 5x dx$

$$= \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}.(\sin 8x - \sin 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}.\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 8x - \sin 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{8}.\cos 8x + \frac{1}{2}.\cos 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{-1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}.\cos 2x\right)\Bigg|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$= \left[\frac{-1}{16}.1 + \frac{1}{4}.(-1)\right] - \left[\frac{-1}{16}.1 + \frac{1}{4}.(-1)\right]$$

$$= \left(-\frac{5}{16}\right) - \left(-\frac{5}{16}\right) = 0.$$

Bài 2 (trang 112 SGK Giải tích 12):

Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^2 |1-x|dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$;

c) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x+1}+1}{e^x} dx$;

d) $\int_0^{\pi} \sin 2x.\cos^2 x dx$.

Lời giải:

a) Ta có:

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x, & \text{khi } x \le 1 \\ x-1, & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Do đó:

$$\int_0^2 |1-x|dx$$

$$= \int_0^1 |1-x|dx + \int_1^2 |1-x|dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx$$

$$= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^2$$

c) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x+1}+1}{e^x}dx$

$= \int_0^{\ln 2} \left(e^{x+1}+e^{-x}\right)dx$

$= \left(e^{x+1}-e^{-x}\right)\Big|_0^{\ln 2}$

$= \left(e^{\ln 2+1}-e^{-\ln 2}\right)-(e^1-e^{-0})$

$= \left(2e-\frac{1}{2}\right)-(e-1)$

$= e+\frac{1}{2}.$

d) $\int_0^{\pi} \sin 2x.\cos^2 x dx$

$= \int_0^{\pi} 2.\sin x.\cos x.\cos^2 x dx$

$$= \int_0^{\pi} 2.\sin x.\cos^3 x dx$$

$$= -2.\int_0^{\pi} \cos^3 x.(\cos x)'.dx$$

$$= -2.\int_0^{\pi} \cos^3 x d(\cos x)$$

$$= -2.\frac{\cos^4 x}{4}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{2}\cos^4 x\Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{2}\left(\cos^4 \pi - \cos^4 0\right)$$

$$= \frac{-1}{2}(1-1) = 0$$

Bài 3 (trang 113 SGK Giải tích 12):

Sử dụng phương pháp đổi biến, hãy tính:

a) $I=\int\limits_0^3 \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}dx$;

b) $I=\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$;

c) $I=\int\limits_0^1 \frac{e^x.(1+x)}{1+x.e^x}dx$;

d) $I=\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$.

Lời giải:

a) Đặt u = 1 + x

$\Rightarrow du = dx; x^2 = (u-1)^2$.

Đổi cận:

x	0	3
u	1	4

Khi đó:

$$I = \int_1^4 \frac{(u-1)^2}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

$$= \int_1^4 \frac{u^2 - 2u + 1}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

$$= \int_1^4 \left(u^{\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{-1}{2}} + u^{\frac{-3}{2}} \right) du$$

$$= \left(\frac{2}{3}.u^{\frac{3}{2}} - 2.2.u^{\frac{1}{2}} - 2.u^{\frac{-1}{2}} \right) \Bigg|_1^4$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{u^3} - 4\sqrt{u} - \frac{2}{\sqrt{u}} \right) \Bigg|_1^4$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{4^3} - 4\sqrt{4} - \frac{2}{\sqrt{4}} \right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1^3} - 4\sqrt{1} - \frac{2}{\sqrt{1}} \right)$$

$$= \frac{-11}{3} - \left(\frac{-16}{3} \right)$$

$$= \frac{5}{3}$$

b) Đặt $x = \sin t \ (0 \le t < 2\pi)$

$\Rightarrow dx = \cos t.dt;$

$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t|.$

Đổi cận:

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{2}$

Khi đó:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|.\cos t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

(vì trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;$\cos t \geq 0$)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}.t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

c) Đặt $u = 1 + x.e^x$.

$\Rightarrow du = \left(e^x + x.e^x\right)dx = e^x\left(1+x\right)dx$

Đổi cận:

x	0	1
u	1	1 + e

Khi đó ta có:

$$I = \int_1^{1+e} \frac{du}{u} = \ln u\Big|_1^{1+e}$$

$= \ln\left(1+e\right) - \ln\left(1\right) = \ln(1 + e)$

d) Đặt $x = a.\sin t$ $\left(0 \le t < 2\pi\right)$.

$\Rightarrow dx = a.\cos t dt$;

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2.\sin t}$$

$= a.\sqrt{1 - \sin^2 t} = a.\left|\cos t\right|$

Đổi cận:

x	0	$\frac{a}{2}$
t	0	$\frac{\pi}{6}$

Khi đó ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a.\cos t}{a.|\cos t|} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a.\cos t}{a.\cos t} dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6}$$

Bài 4 (trang 113 SGK Giải tích 12):

Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, hãy tính:

a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x+1)\sin x dx$;

b) $\int_{1}^{e}x^2\ln x dx$;

c) $\int_{0}^{1}\ln(1+x)dx$;

d) $\int_{0}^{1}\left(x^2-2x-1\right).e^{-x}dx$

Lời giải:

a) Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = \sin x dx \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

Theo công thức tích phân từng phần ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x dx$$

$$= (x+1).(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx$$

$$= 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 1.$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

b) Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x} dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

Theo công thức tích phân từng phần ta có:

$$I=\int_1^e x^2\ln x\,dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}.\ln x\right)\Bigg|_1^e-\int_1^e\frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}.\ln x\right)\Bigg|_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}.\ln x\right)\Bigg|_1^e-\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.x^3\right)\Bigg|_1^e$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}.\ln x-\frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_1^e$$

$$=\left(\frac{e^3}{3}.1-\frac{e^3}{9}\right)-\left(\frac{1^3}{3}.\ln 1-\frac{1^3}{9}\right)$$

$$=\frac{2e^3}{9}+\frac{1}{9}$$

c) Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = x \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần:

$$I=\int_0^1 \ln(1+x)dx$$

$$=x.\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{x+1}dx$$

$$=x.\ln(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=x.\ln(x+1)\Big|_0^1-\left(x-\ln(x+1)\right)\Big|_0^1$$

$$=\left[x.\ln(x+1)-x+\ln(x+1)\right]\Big|_0^1$$

$$=2\ln 2-1.$$

d) Đặt $\begin{cases}u=x^2-2x-1\\ dv=e^{-x}dx\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}du=(2x-2)dx\\ v=-e^{-x}\end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần:

$$I=\int_0^1\left(x^2-2x-1\right).e^{-x}dx$$

$$=\left(x^2-2x-1\right).\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^1$$

$$-\int_0^1(2x-2).\left(-e^{-x}\right)dx$$

$$=\left(\frac{2}{e}-1\right)+\int_0^1(2x-2).e^{-x}dx$$

Tính $I_1=\int_0^1(2x-2).e^{-x}dx$.

Đặt $\begin{cases}u_1=2x-2\\dv_1=e^{-x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du_1=2dx\\v_1=-e^{-x}\end{cases}$

Theo công thức tích phân từng phần:

$$I_1 = (2x-2).\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 2.\left(-e^{-x}\right)dx$$

$$= (2x-2).\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^1 + 2.\int_0^1 e^{-x}dx$$

$$= (2x-2).\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^1 - \left(2.e^{-x}\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(-2x.e^{-x}\right)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{2}{e}.$$

Do đó: $I = \frac{2}{e} - 1 + I_1 = -1$.

Bài 5 (trang 113 SGK Giải tích 12):

Tính các tích phân sau:

a) $\int_0^1 (1+3x)^{\frac{3}{2}} dx$;

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3-1}{x^2-1} dx$;

c) $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$.

Lời giải:

a) Đặt $u = 1 + 3x$

$\Rightarrow du = 3dx$ hay $dx = \dfrac{du}{3}$

Đổi cận:

x	0	1
u	1	4

Khi đó:

$$I = \int_1^4 u^{\frac{3}{2}} \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_1^4 u^{\frac{3}{2}} du$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{2}{5}.u^{\frac{5}{2}}\bigg|_1^4 = \frac{2}{15}.\sqrt{u^5}\bigg|_1^4$$

$$= \frac{2}{15}.31 = \frac{62}{15}$$

b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3-1}{x^2-1}dx$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}dx$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+x+1}{x+1}dx$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} xdx + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x+1}dx$

$= \left(\frac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{8}+\ln\frac{3}{2}$

c) Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = \dfrac{1}{x^2}dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ v = \dfrac{-1}{x} \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần:

$$I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$$

$$= \left(-\frac{1}{x}.\ln(1+x)\right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{-1}{x(x+1)}dx$$

$$= \left(-\frac{1}{x}.\ln(x+1)\right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left(-\frac{1}{x}.\ln(x+1)\right)\Bigg|_1^2 - \left(\ln(x+1) - \ln x\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{x}.\ln(x+1) - \ln(x+1) + \ln x \right)\Bigg|_1^2$$

$$= \left(-\frac{3}{2}.\ln 3 + \ln 2 \right) + 2.\ln 2$$

$$= \frac{-3}{2}\ln 3 + 3\ln 2 .$$

Bài 6 (trang 113 SGK Giải tích 12):

Tính bằng hai phương pháp:

a) Đổi biến số u = 1 – x;

b) Tính tích phân từng phần.

Lời giải:

a) Đặt u = 1 – x;

⇒ du = -dx

Đổi biến :

x	0	1
u	1	0

$$\Rightarrow \int_0^1 x(1-x)^5 dx$$

$$= \int_1^0 -(1-u).u^5 du = \int_0^1 (1-u).u^5 du$$

$$= \int_0^1 (u^5 - u^6) du = \left(\frac{u^6}{6} - \frac{u^7}{7}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{42}.$$

b) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = (1-x)^5 dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\dfrac{(1-x)^6}{6} \end{cases}$$

Theo công thức tích phân từng phần:

$$\int_0^1 x(1-x)^5dx$$

$$=\left(-\frac{x.(1-x)^6}{6}\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1-\frac{(1-x)^6}{6}dx$$

$$=0+\frac{1}{6}\int_0^1(x-1)^6dx=\frac{1}{6}.\frac{(x-1)^7}{7}\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{42}.$$