

ĐỀ THI THỬ TUYỂN SINH VÀO 10 MÔN TOÁN

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}}$

($x > 0, x \neq 4$)

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tính giá trị của A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$

3) Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Câu 2. Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - m^2 + m - 2 = 0$, với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu với mọi m.

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2 . Tìm m để biểu thức $A = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^3 - \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^3$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3. Một ca nô xuôi dòng 78 km và ngược dòng 44 km mất 5 giờ với vận tốc dự định. nếu ca nô xuôi 13 km và ngược dòng 11 km với cùng vận tốc dự định đó thì mất 1 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc dòng nước.

Câu 4. Từ điểm K nằm ngoài đường tròn (O) ta kẻ các tiếp tuyến KA, KB cắt tuyến KCD đến (O) sao cho tia KC nằm giữa hai tia KA, KO. Gọi H là trung điểm CD.

a) Chứng minh: 5 điểm A, K, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh: Tứ giác MODC nội tiếp.

c) Đường thẳng qua H song song với BD cắt AB tại I. Chứng minh $CI \perp OB$.

Câu 5. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Chứng minh rằng: $x + y + z \leq xyz + 2$

Hết

Câu 1.

1) Với $x > 0, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{3}+3}{5x-10\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} : \frac{2\sqrt{x}+3}{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0, x \neq 4$. thì $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$

2) Khi $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2}-1$

thay vào ta có:

$$A = \frac{5(\sqrt{2}-1)}{2(\sqrt{2}-1)+1} = \frac{5(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}-1} = \frac{5(\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}+1)}{7} = \frac{5(3-\sqrt{2})}{7}$$

3) Ta có $\sqrt{x} > 0, \forall x > 0, x \neq 4$ nên $A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} > 0, x > 0, x \neq 4$

$(A = \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}) \Rightarrow (A(2\sqrt{x}+1) = 5\sqrt{x}) \Rightarrow (2A\sqrt{x} + A = 5\sqrt{x}) \Rightarrow (2A - 5)\sqrt{x} = -A \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{A}{5-2A}$, $x > 0, x \neq 4 \Rightarrow 0 < \frac{A}{5-2A} < 2$ kết hợp với A nhận giá trị là một số nguyên thì $A \in \{1, 2\}$.

$$A = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

$$A = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 4\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy với $x = \frac{1}{9}$ thì A nhận giá trị là nguyên.

Câu 2

a) Xét $a \cdot c = -m^2 + m - 2 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi m .

b) Gọi hai nghiệm của phương trình đã cho là x_1, x_2 .

Theo câu a) thì $x_1 x_2 \neq 0$, do đó A được xác định với mọi x_1, x_2 . Do x_1, x_2 trái dấu nên

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -t \text{ với } t > 0, \text{ suy ra } \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 < 0, \text{ suy ra } A < 0$$

$$\text{Đặt } \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -t, \text{ với } t > 0, \text{ suy ra } \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3 = -\frac{1}{t}.$$

Khi đó $A = -t - \frac{1}{t}$ mang giá trị âm và A đạt giá trị lớn nhất khi $-A$ có giá trị nhỏ nhất.

Ta có $-A = t + \frac{1}{t} \geq 2$, suy ra $A \leq -2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$t = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = 1. \text{ Với } t = 1, \text{ ta có}$$

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 = -1 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = -1 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow -(m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy với $m=1$ thì biểu thức A đạt giá trị lớn nhất là -2 .

Câu 3.

Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h, $x > 0$)

Và vận tốc của dòng nước là y (km/h, $y > 0$)

Ca nô xuôi dòng đi với vận tốc $x+y$ (km/h). Đi đoạn đường 78 km nên thời gian đi là $\frac{78}{x+y}$ (giờ).

Ca nô đi ngược dòng với vận tốc $x-y$ (km/h). Đi đoạn đường 44 km nên thời gian đi là $\frac{44}{x-y}$ (giờ).

Tổng thời gian xuôi dòng là 78 km và ngược dòng là 44 km mất 5 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{78}{x+y} + \frac{44}{x-y} = 5 \quad (1)$$

Ca nô xuôi dòng 13 km và ngược dòng 11 km nên ta có phương trình:

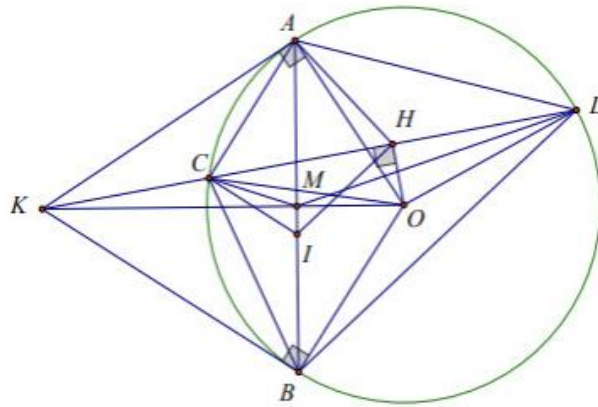
$$\frac{13}{x+y} + \frac{11}{x-y} = 1 \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:}$$

$$\begin{cases} \frac{78}{x+y} + \frac{44}{x-y} = 5 \\ \frac{13}{x+y} + \frac{11}{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 26 \\ x-y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy thỏa mãn.

Vậy vận tốc riêng của ca nô là 24 km/h và vận tốc của dòng nước là 2 km/h.

Câu 4.



a) Vì KA, KB là các tiếp tuyến của (O) nên $\angle KAO = \angle KBO = 90^\circ$.

Do H là trung điểm của dây CD nên $\angle KHO = 90^\circ$

Từ đó suy ra 5 điểm K, A, H, O, B cùng nằm trên đường tròn đường kính KO.

b) Vì M là trung điểm của AB nên $AM \perp KO$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông KAO $\Rightarrow KM \cdot KO = KA^2$.

Xét tam giác KAC và tam giác KDA có

$\angle KAC = \angle KDA$ (Tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

Góc AKD chung.

Nên $\triangle KAC \sim \triangle KDA$ (g.g).

$$\Rightarrow \frac{KA}{KC} = \frac{KD}{KA} \Rightarrow KA^2 = KC \cdot KD. \text{ Suy ra } KC \cdot KD = KH \cdot KO$$

$$\Rightarrow \triangle KMC \sim \triangle KDO \text{ (g.g)} \Rightarrow \angle CMK = \angle CDO \Rightarrow \text{CMOD nội tiếp.}$$

c) Ta có $HI \parallel BD \Rightarrow \angle CHI = \angle CDB$.

Mặt khác $\angle CAB = \angle CDB$ cùng chắn cung CB nên suy ra $\angle CHI = \angle CAB$ hay AHIC là tứ giác nội tiếp. Do đó $\angle IAH = \angle ICH \Leftrightarrow \angle BAH = \angle ICH$.

Mặt khác ta có A, K, B, O, H cùng nằm trên đường tròn đường kính OK nên $\angle BAH = \angle BKH$. Từ đó suy ra

$$\angle ICH = \angle BKH \Rightarrow CI \parallel KB.$$

$$\text{Mà } KB \perp OB \Rightarrow CI \perp OB$$

Câu 5.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$x + y + z - xyz = x(1 - yz) + (y + z). 1 \leq \sqrt{[x^2 + (y + z)^2] [(1 - yz)^2 + 1]}$$

Tới đây ta cần chứng minh

$$(2 + 2yz)(2 - 2yz + y^2z^2) \leq 4 \Leftrightarrow y^3z^3 - y^2z^2 \leq 0 \Leftrightarrow y^2z^2(yz - 1) \leq 0.$$

$$\text{Mặt khác theo giả thiết ta có } 2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq y^2 + z^2 \geq 2yz \Rightarrow yz \leq 1.$$

Nên bất đẳng thức trên luôn đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi có 2 số bằng 1 và một số bằng 0.