GIẢI TOÁN 12 BÀI: NGUYÊN HÀM

Trả lời câu hỏi SGK Toán Giải tích 12 Bài 1 (Chương 3):

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 1 trang 93 (1):

Tìm hàm số F(x) sao cho F’(x) = f(x) nếu:

a) $f(x) = 3x^2$ với $x \in (-\infty; +\infty)$;

b) $f(x) = 1/(\cos x)^2$ với $x \in ((-\pi)/2; \pi/2)$.

Lời giải:

$F(x) = x^3$ vì $(x^3)' = 3x^2$

$F(x) = \tan x$ vì $(\tan x)' = 1/(\cos x)^2$.

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 1 trang 93 (2):

Hãy tìm thêm những nguyên hàm khác của các hàm số nêu trong Ví dụ 1.

Lời giải:

$(x) = x^2 + 2$ do $(F(x))' = (x^2 + 2)' = 2x + 0 = 2x$. Tổng quát $F(x) = x^2 + c$ với c là số thực.

$F(x) = \ln x + 100$, do $(F(x))' = 1/x$, $x \in (0,+\infty)$. Tổng quát $F(x) = \ln x + c$, $x \in (0,+\infty)$ và với c là số thực.

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 1 trang 93 (3):

Hãy chứng minh Định lý 1.

Lời giải:

Vì F(x) là nguyên hàm của f(x) trên K nên (F(x))' = f(x). Vì C là hằng số nên (C)’ = 0.

Ta có:

$(G(x))' = (F(x) + C)' = (F(x))' + (C)' = f(x) + 0 = f(x)$

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 1 trang 95:

Hãy chứng minh Tính chất 3.

Lời giải:

Ta có $[\int f(x) \pm \int g(x)]' = [\int f(x)]' \pm [\int g(x)]' = f(x) \pm g(x)$.

Vậy $\int f(x) \pm \int g(x) = \int [f(x) \pm g(x)]$.

Vậy G(x) là một nguyên hàm của f(x).

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 1 trang 96:

Lập bảng theo mẫu dưới đây rồi dùng bảng đạo hàm trang 77 và trong SGK Đại số và Giải tích 11 để điền vào các hàm số thích hợp vào cột bên phải.

Lời giải:

f'(x)	f(x) + C
0	C
$\alpha x^{\alpha-1}$	$x^{\alpha} + C$
$1/x$ $(x \neq 0)$	ln(x) + C nếu x > 0, ln(-x) + C nếu x < 0.
e^x	$e^x + C$
$a^x \ln a$ $(a > 1, a \neq 0)$	$a^x + C$
Cosx	sinx + C
- sinx	cosx + C
$1/(\cos x)^2$	tanx + C
$(-1)/(\sin x)^2$	cotx + C

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 1 trang 98:

a) Cho $\int (x - 1)^{10}\,dx$. Đặt $u = x - 1$, hãy viết $(x - 1)^{10}dx$ theo u và du.

b) ∫

Đặt $x = e^t$, hãy viết theo t và dt.

a) Ta có $(x - 1)^{10}dx = u^{10}$ du (do du = d(x - 1) = dx.

b) Ta có $dx = d(e^t) = e^t$ dt, do đó

$$\frac{lnx}{x}dx = \frac{\ln(e^t)}{e^t}e^t dt = tdt$$

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 1 trang 99:

Ta có (xcosx)' = cosx – xsinx hay - xsinx = (xcosx)' – cosx.

Hãy tính ∫ (xcosx)' dx và ∫ cosxdx. Từ đó tính ∫ xsinxdx.

Lời giải:

Ta có ∫ (xcosx)'dx = (xcosx) và ∫ cosxdx = sinx. Từ đó

∫ xsinxdx = - ∫ [(xcosx)' – cosx]dx = -∫ (xcosx)'dx + ∫ cosxdx = - xcosx + sinx + C.

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 1 trang 100:

Cho P(x) là đa thức của x. Từ Ví dụ 9, hãy lập bảng theo mẫu dưới đây rồi điền u và dv thích hợp vào chỗ trống theo phương pháp nguyên phân hàm từng phần.

∫ P(x)e^x dx	∫ P(x)cosxdx	∫ P(x)lnxdx
P(x)		
e^xdx		

Lời giải:

∫ P(x)e^x dx	∫ P(x)cosxdx	∫ P(x)lnxdx
P(x)	P(x)	P(x)lnx
e^xdx	cosxdx	dx

Giải bài tập SGK Toán Giải tích 12 Bài 1 (Chương 3):

Bài 1 (trang 100 SGK Giải tích 12):

Trong các cặp hàm số dưới đây, hàm số nào là nguyên hàm của hàm số còn lại?

a) e^{-x} và $-e^{-x}$;

b) $\sin 2x$ và $\sin^2 x$;

c) $\left(1-\frac{2}{x}\right)^2.e^x$ và $\left(1-\frac{4}{x}\right).e^x$

Lời giải:

a) Ta có: $(-e^{-x})' = -e^{-x}.(-x)' = e^{-x}$

⇒ $-e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số e^{-x}

Lại có : $(e^{-x})' = e^{-x}. (-x)' = - e^{-x}$

Suy ra, e^{-x} là một nguyên hàm của hàm số $-e^{-x}$

Vậy

b) $(\sin^2x)' = 2.\sin x.(\sin x)' = 2.\sin x.\cos x = \sin 2x$

⇒ $\sin^2x$ là một nguyên hàm của hàm số .

c) $\left[\left(1-\frac{4}{x}\right).e^x\right]'$

$$=\left(1-\frac{4}{x}\right)'.e^x+\left(1-\frac{4}{x}\right).\left(e^x\right)'$$

$$=\frac{4}{x^2}.e^x+\left(1-\frac{4}{x}\right).e^x$$

$$=\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right).e^x$$

$$=\left(1-\frac{2}{x}\right)^2.e^x.$$

$\Rightarrow \left(1-\frac{2}{x}\right)^2.e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x$

$$\Rightarrow \int\left(1-\frac{4}{x}\right).e^x dx=\left(1-\frac{2}{x}\right)^2.e^x+C$$

Bài 2 (trang 100 SGK Giải tích 12):

Tìm hiểu nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f\left(x\right)=\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}$;

b) $f\left(x\right)=\dfrac{2^x-1}{e^x}$;

c) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}$;

d) $f\left(x\right)=\sin 5x.\cos 3x$;

e) $f(x) = \tan^2x$;

g) $f\left(x\right)=e^{3-2x}$;

h) $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(1+x\right)\left(1-2x\right)}$

Lời giải:

a) $\int \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx$

$= \int\left(x+x^{\frac{1}{2}}+1\right).x^{\frac{-1}{3}}dx$

$= \int\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{-1}{3}}\right)dx$

$= \int x^{\frac{2}{3}}dx + \int x^{\frac{1}{6}}dx + \int x^{\frac{-1}{3}}dx$

$= \frac{3}{5}.x^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{7}.x^{\frac{7}{6}}+\frac{3}{2}.x^{\frac{2}{3}}+C.$

$= \frac{3}{5}.x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{7}.x\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}.\sqrt[3]{x^2}+C$

b) $\int \frac{2^x - 1}{e^x} dx$

$= \int \left[\left(\frac{2}{e} \right)^x - \left(\frac{1}{e} \right)^x \right] dx$

$= \int \left(\frac{2}{e} \right)^x dx$ - $\int e^{-x} dx$

$= \frac{\left(\frac{2}{e} \right)^x}{\ln\left(\frac{2}{e} \right)} + e^{-x} + C$

$= \frac{2^x}{e^x.(\ln 2 - 1)} + e^{-x} + C.$

($\ln\left(\frac{2}{e} \right) = \ln 2$ - $\ln e = \ln 2 - 1$)

c) $\int \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x} dx$

$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x} dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$= \tan x - \cot x + C.$$

d) $\int \sin 5x.\cos 3x\,dx$

$$= \int \frac{1}{2} (\sin 8x + \sin 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 8x dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{8}.(-\cos 8x) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.(-\cos 2x) + C$$

$$= \frac{-1}{16}.\cos 8x - \frac{1}{4}.\cos 2x + C.$$

e) $\int \tan^2 x dx$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx$

$= \tan x - x + C$.

g) $\int e^{3-2x} dx$.

Đặt t= 3 - 2x

$\Rightarrow$ dt= - 2dx $\Rightarrow dx = \frac{-dt}{2}$

Ta có:

$\int e^{3-2x} dx = \int e^t . \frac{-dt}{2} = -\frac{1}{2} \int e^t dt$

$= \frac{-1}{2} e^t + C = \frac{-1}{2} e^{3-2x} + C$

h) $\int \frac{1}{(1+x)(1-2x)} dx$

Ta có:

$$\frac{1}{(1+x).(1-2x)} = \frac{1-2x+2.(1+x)}{3(1+x).(1-2x)}$$

$$= \frac{1-2x}{3(1+x).(1-2x)} + \frac{2.(1+x)}{3(1+x).(1-2x)}$$

$$= \frac{1}{3(1+x)} + \frac{2}{3(1-2x)}$$

Do đó,

$$\int \frac{1}{(1+x).(1-2x)}dx = \int \left[\frac{1}{3.(1+x)} + \frac{2}{3.(1-2x)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}dx + \frac{2}{3}\int \frac{1}{1-2x}dx \quad (1)$$

+Xét $\int \frac{1}{1+x}dx$

Đặt t= 1+ x => dt = dx

Khi đó,

$$\int \frac{1}{1+x}dx = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln|1+x| + C \quad (2)$$

+ Xét $\int \frac{1}{1-2x}dx$

Đặt t= 1- 2x

=> dt = - 2dx nên $dx = \frac{-dt}{2}$

Ta có:

$$\int \frac{1}{1-2x}dx = \int \frac{1}{t}.\frac{-dt}{2} = \frac{-1}{2}.\int \frac{1}{t}dt$$

$$= \frac{-1}{2}\ln|t| + C_2 = \frac{-1}{2}\ln|1-2x| + C_2 \ (3)$$

Thay (2) .(3) vào (1) ta được

$$\int \frac{1}{(1+x)(1-2x)}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+x| + \frac{2}{3}.\frac{-1}{2}.\ln|1-2x| + C'$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{3}.\ln|1-2x| + C'$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{1-2x}\right| + C'$$

Bài 3 (trang 101 SGK Giải tích 12):

Sử dụng phương pháp đổi biến, hãy tính:

a) $I = \int (1-x)^9 dx$;

b) $I = \int x.(1+x^2)^{\frac{3}{2}} dx$;

c) $I = \int \cos^3 x.\sin x dx$;

d) $I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2}$.

Lời giải:

a) Đặt u = 1 - x ⇒ u'(x) = -1⇒ du = -dx hay dx = - du

Thay u = 1 – x vào kết quả ta được :

b) Đặt $u = 1 + x^2$ ⇒ u' = 2x ⇒ du = 2x.dx

Thay lại $u = 1+ x^2$ vào kết quả ta được:

c) Đặt u = cosx ⇒ u' = -sinx ⇒ du = -sinx.dx

Thay lại u = cos x vào kết quả ta được:

d) Ta có:

$$\frac{1}{e^x + e^{-x} + 2}$$

$$= \frac{e^x}{e^{2x} + 1 + 2.e^x} = \frac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}.$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} dx.$$

Đặt $u = e^x + 1$

$$\Rightarrow u' = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{1}{u^2} du = \int u^{-2} du$$

$$= -u^{-1} + C = \frac{-1}{u} + C$$

Thay $u = e^x + 1$ vào kết quả ta được:

$$I = \frac{-1}{e^x + 1} + C.$$

Bài 4 (trang 101 SGK Giải tích 12):

Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính:

a) $\int x.\ln(1+x)dx$;

b) $\int (x^2+2x-1).e^x dx$;

c) $\int x.\sin(2x+1)dx$;

d) $\int (1-x).\cos x dx$.

Lời giải:

a) Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = x.dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x}dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

Theo công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$$\int x.\ln(1+x)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}.\ln(1+x)-\int\frac{x^2}{2}.\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}.\ln(1+x)-\int\frac{(x^2-1)+1}{2.(x+1)}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}.\ln(1+x)-\int\left(\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2(x+1)}\right)dx$$

$$=\frac{x^2}{2}.\ln(1+x)-\int\frac{x-1}{2}dx-\int\frac{1}{2(x+1)}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}.\ln(1+x)-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|1+x|+C$$

b) Đặt

$$\begin{cases}u=x^2+2x-1\\dv=e^x.dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2x+2\\v=e^x\end{cases}$$

Theo công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$$I_1 = (2x+2).e^x - \int 2e^x dx$$

$$= (2x+2).e^x - 2e^x + C$$

$$= 2x.e^x + C.$$

Thay vào (1) ta có:

$$I = (x^2 + 2x - 1).e^x - I_1$$

$$= (x^2 + 2x - 1).e^x - 2x.e^x + C$$

$$= (x^2 - 1).e^x + C.$$

c) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin(2x+1)dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{-1}{2}.\cos(2x+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int x.\sin(2x+1)dx$$

Theo công thức nguyên hàm từng phần ta có:

$$I_1 = (2x+2).e^x - \int 2e^x dx$$

$$= (2x+2).e^x - 2e^x$$

$$= 2x.e^x + C.$$

Thay vào (1) ta có:

$$I = \left(x^2 + 2x - 1\right).e^x - I_1$$

$$= \left(x^2 + 2x - 1\right).e^x - 2x.e^x + C$$

$$= \left(x^2 - 1\right).e^x + C.$$

c) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin(2x+1)dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{-1}{2}.\cos(2x+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int x.\sin(2x+1)dx$$

$$= x.\frac{-1}{2}.\cos(2x+1) - \int \frac{-1}{2}.\cos(2x+1)dx$$

$$= \frac{-x}{2}.\cos(2x+1) + \frac{1}{2}.\int \cos(2x+1)dx$$

$$= \frac{-x}{2}.\cos(2x+1) + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\sin(2x+1) + C$$

$$= \frac{-x}{2}.\cos(2x+1) + \frac{1}{4}.\sin(2x+1) + C.$$

d) Đặt $\begin{cases} u = 1 - x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int (1-x)\cos x dx$$

$$= (1-x).\sin x - \int \sin x.(-1).dx$$

$$= (1-x).\sin x + \int \sin x dx$$

$$= (1-x).\sin x - \cos x + C.$$