GIẢI BÀI: ÔN TẬP CHƯƠNG 1 GIẢI TÍCH 12

Bài 1 (trang 45 SGK Giải tích 12): Phát biểu các điều kiện đồng biến và nghịch biến của hàm số. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

$$y = -x^3 + 2x^2 - x - 7;$$

$$y = \frac{x-5}{1-x}.$$

Lời giải:

- Điều kiện đồng biến, nghịch biến của hàm số:

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm trên khoảng K.

+ f(x) đồng biến (tăng) trên K nếu f'(x) > 0 với ∀ x ∈ K.

+ f(x) nghịch biến (giảm) trên K nếu f'(x) < 0 với ∀ x ∈ K.

- Xét hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - x - 7$, ta có:

$y' = -3x^2 + 4x - 1$

+ Hàm số đồng biến

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 4x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < 1.$$

+ Hàm số nghịch biến

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 4x - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \frac{1}{3} \\ x > 1 \end{array}\right..$$

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(\frac{1}{3};1\right)$

nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ và $(1; +\infty)$

- Xét hàm số $y=\frac{x-5}{1-x}$

Ta có: D = R \ {1}

$y'=\frac{-4}{(1-x)^2}<0$ $\forall x \in D$.

⇒ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Bài 2 (trang 45 SGK Giải tích 12): Nêu cách tìm cực đại, cực tiểu của hàm số nhờ đạo hàm. Tìm các cực trị của hàm số:

$$y = x^4 - 2x^2 + 2$$

Lời giải:

a) Cách tìm cực đại, cực tiểu của hàm số nhờ đạo hàm:

Quy tắc 1:

1. Tìm tập xác định.

2. Tính f'(x). Tìm các điểm tại đó f'(x) bằng 0 hoặc f'(x) không xác định.

3. Lập bảng biến thiên.

4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2:

1. Tìm tập xác định.

2. Tính f'(x). Giải phương trình f'(x) = 0 và kí hiệu x_i (i = 1, 2, 3, ...) là các nghiệm của nó.

3. Tính f''(x) và f''(x_i)

4. Nếu f''(x_i) > 0 thì x_i là điểm cực tiểu.

Nếu f''(x_i) < 0 thì x_i là điểm cực đại.

b) Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$, ta có:

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$

$y'' = 12x^2 - 4$

Dựa vào Quy tắc 2, ta có:

$y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại.

$y''(-1) = y''(1) = 8 > 0 \Rightarrow x = \pm 1$ là hai điểm cực tiểu.

Bài 3 (trang 45 SGK Giải tích 12): Nêu cách tìm ra tiệm cận ngang và tiệm cận dứng của đồ thị hàm số. Áp dụng để tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số:

Áp dụng để tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{2-x}$

Lời giải:

a) - Cách tìm tiệm cận ngang:

+ Tính các giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} y$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} y$

+ Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} y = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} y = y_0$ thì y = y_0 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- Cách tìm tiệm cận đứng:

Đường thẳng x = x_0 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số y = f(x) nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} y = +\infty\ ;\ \lim_{x\to x_0^-} y = +\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to x_0^+} = -\infty\ ;\ \lim_{x\to x_0^-} = -\infty.$$

b) Xét hàm số: $y = \dfrac{2x+3}{2-x}$

+ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x+3}{2-x} = -\infty$

⇒ Đồ thị có tiệm cận đứng là x = 2.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{2-x} = -2$

⇒ Đồ thị có tiệm cận ngang là y = -2.

Bài 4 (trang 45 SGK Giải tích 12): Nhắc lại sơ đồ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

Lời giải:

Hàm số y = f(x)

Các bước khảo sát hàm số:

1. Tìm tập xác định của hàm số

2. Sự biến thiên

- Xét chiều biến thiên:

+ Tính đạo hàm y'

+ Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc không xác định

+ Xét dấu của đạo hàm y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

- Tìm cực trị

- Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có)

- Lập bảng biến thiên.

3. Vẽ đồ thị của hàm số

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

Bài 5 (trang 45 SGK Giải tích 12): Cho hàm số $y = 2x^2 + 2mx + m - 1$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m = -1

b) Xác định m để hàm số:

i) Đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

ii) Có cực trị trên khoảng $(-1; +\infty)$

c) Chứng minh rằng (C_m) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt với mọi m.

Lời giải:

a) Với m = 1 ta được hàm số: $y = 2x^2 + 2x$

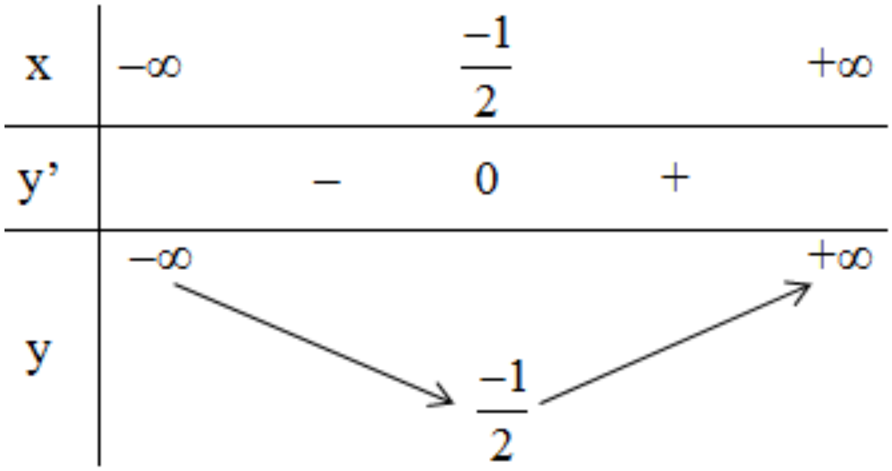
- TXĐ: D = R,

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = 4x + 2$

y' = 0 ⇔ x = -1/2

+ Bảng biến thiên:



Kết luận: Hàm số nghịch biến trên (-∞; -1/2), đồng biến trên (-1/2; +∞).

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là (-1/2; -1/2)

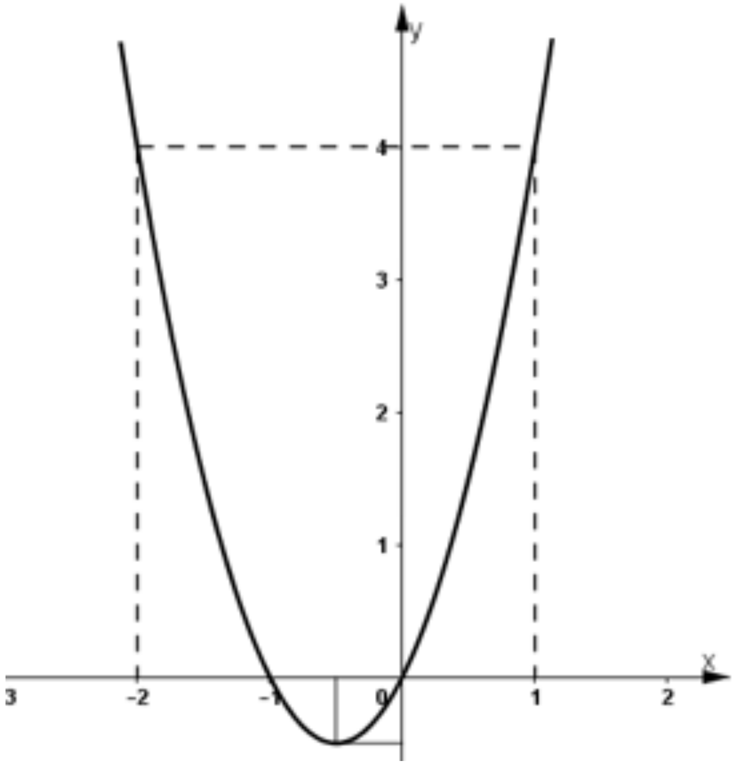
- Đồ thị:

Ta có: $2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x + 1) = 0$

⇒ x = 0; x = -1

+ Giao với Ox: (0; 0); (-1; 0)

+ Giao với Oy: (0; 0)



b) Xét hàm số $y = 2x^2 + 2mx + m - 1$

$y' = 4x + 2m = 2(2x + m)$

$y' = 0 \Rightarrow x = -m/2$

Ta có bảng xét biến thiên :

x	$-\infty$		$\frac{-m}{2}$		$+\infty$
y’		-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{m^2}{2}+m-1$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy :

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow (-1;+\infty) \subset \left(\frac{-m}{2};+\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-m}{2} \le -1$$

$$\Leftrightarrow m \ge 2.$$

- Hàm số có cực trị trên khoảng (-1; +∞)

$$\Leftrightarrow -\frac{m}{2} > -1$$

$$\Leftrightarrow m < 2.$$

c) Nhận thấy: $-\frac{m^2}{2}+m-1=-\frac{1}{2}(m-1)^2-\frac{1}{2}<0$ với mọi m.

Suy ra, giá trị cực tiểu luôn nhỏ hơn 0 với mọi m.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đường thẳng y = 0 (trục hoành) luôn cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt (đpcm).

Bài 6 (trang 45 SGK Giải tích 12): a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$$

b) Giải phương trình f'(x - 1) > 0.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0, biết rằng $f'(x_0) = -6$.

Lời giải:

a) Khảo sát hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = +\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y = -\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	29	$\searrow$	$-\infty$

Kết luận:

Hàm số đồng biến trên (-1; 3)

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

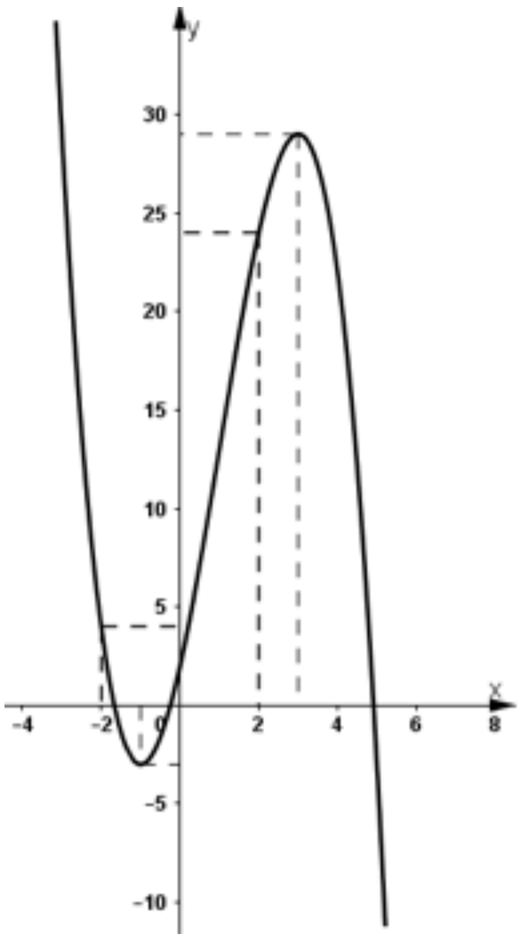
Hàm số đạt cực đại tại x = 3, $y_{CĐ} = 29$.

Hàm số đạt cực tiểu tại x = -1; $y_{CT} = -3$.

- Đồ thị:

+ Giao với trục tung tại (0; 2).

+ Đi qua các điểm (-2; 4); (2; 24).



b) $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$.

$\Rightarrow f'(x - 1) = -3(x - 1)^2 + 6.(x - 1) + 9$.

Ta có: $f'(x - 1) > 0$

$\Leftrightarrow -3(x - 1)^2 + 6(x - 1) + 9 > 0$

$\Leftrightarrow -3(x^2 - 2x + 1) + 6x - 6 + 9 > 0$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 6x - 3 + 6x - 6 + 9 > 0$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 12x > 0$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4x > 0$

$\Leftrightarrow x(4 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$

c) Ta có: $f''(x) = -6x + 6$

Theo bài: $f''(x_0) = -6 \Leftrightarrow -6x_0 + 6 = -6 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Tại $y_0 = 2$, $f'(2) = -3.2^2 + 6.2 + 9 = 9$; $f(2) = -2^3 + 3.2^2 + 9.2 + 2 = 24$.

⇒ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $y_0 = 2$ là :

$y = 9(x - 2) + 24$ hay $y = 9x + 6$.

Bài 7 (trang 45-46 SGK Giải tích 12): a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = x^3 + 3x^2 + 1$$

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận số nghiệm phương trình sau theo m:

$$x^3 + 3x^2 + 1 = m/2$$

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C).

Lời giải:

a) Khảo sát hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} y = +\infty .$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Kết luận:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

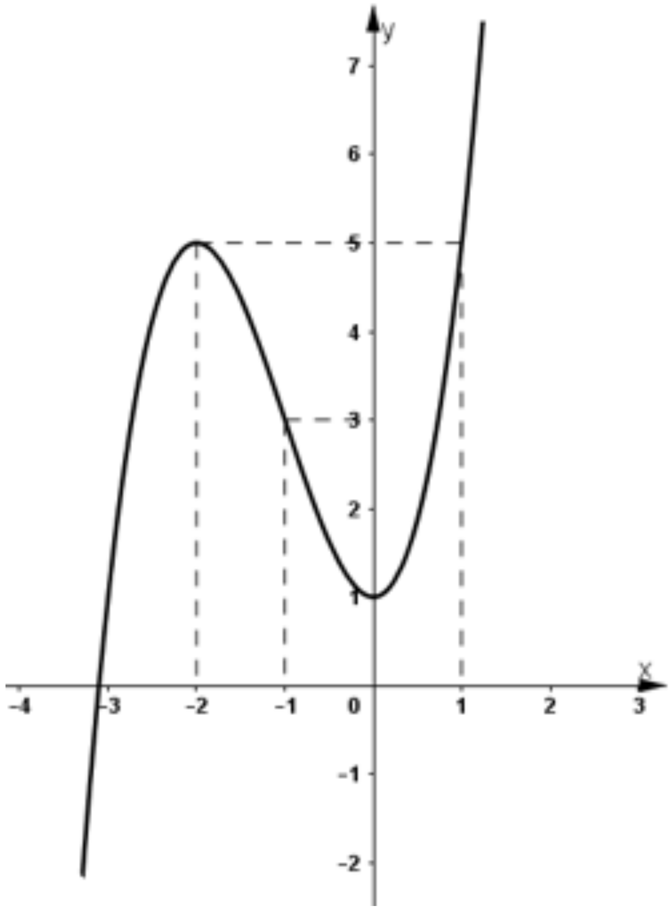
Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$; $y_{CT} = 1$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$; $y_{CĐ} = 5$.

- Đồ thị:

+ Giao với Oy: $(0; 1)$.

+ Đồ thị (C) đi qua điểm $(–3; 1)$, $(1; 5)$.



b) Số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 + 1 = m/2$ bằng số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng y = m/2.

Từ đồ thị ta có:

+ Đường thẳng cắt đồ thị tại 1 điểm khi và chỉ khi :

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{2} < 1 \\ \dfrac{m}{2} > 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 2 \\ m > 10\end{array}\right.$$

⇒ phương trình có 1 nghiệm.

+ Để đường thẳng cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi :

$$\left[\begin{array}{l}\frac{m}{2}=1\\ \frac{m}{2}=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=2\\ m=10\end{array}\right.$$

⇒ Phương trình có hai nghiệm.

+ Với $1<\frac{m}{2}<5$ ⇔ 2 < m < 10.

⇒ Đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm

⇒ Phương trình có ba nghiệm phân biệt.

c) Điểm cực đại A(-2; 5) và điểm cực tiểu B(0; 1).

⇒ vtcp của đường thẳng AB: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2;-4)$

⇒ vtpt của AB: $\vec{n}=(2;1)$

Đường thẳng AB : qua A(-2 ; 5) và có VTPT $\vec{n}=(2;1)$ nên có phương trình:

2(x+2)+ 1(y – 5) = 0 hay 2x + y - 1 = 0

Bài 8 (trang 46 SGK Giải tích 12): Cho hàm số: $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$ (m là tham số).

a) Xác định m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

b) Với giá trị nào của tham số m thì hàm số có một cực đại và một cực tiểu?

c) Xác định m để f"(x) > 6x.

Lời giải:

a) TXĐ: D = R

f'(x) = $3x^2$ - 6mx + 3(2m - 1)

Hàm số đồng biến trên R

⇔ f'(x) > 0 với ∀ x ∈ R.

⇔ $\Delta_{f'(x)} = (3m)^2 - 3.3(2m-1) \leq 0$

⇔ $9m^2 - 18m + 9 \leq 0$

⇔ $9.(m-1)^2 \leq 0$

⇔ $(m-1)^2 = 0$

⇔ m = 1.

b) Hàm số có một cực đại và một cực tiểu

⇔ phương trình f'(x) = 0 có 2 nghiệm phân biệt.

⇔ $\Delta_{f'(x)} = 9(m-1)^2 > 0$

⇔ m ≠ 1

c) Ta có: f''(x) = 6x - 6m

f''(x) > 6x ⇔ 6x - 6m > 6x

⇔ - 6m > 0 ⇔ m < 0

Bài 9 (trang 46 SGK Giải tích 12): a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

$$y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$$

b) Viết phương tình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình f''(x) = 0.

c) Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình: $x^4 - 6x^2 + 3 = m$.

Lời giải:

a) Khảo sát hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

f'(x) = $2x^3$ - 6x = 2x(x^2 - 3)

f'(x) = 0 ⇔ 2x(x^2 - 3) = 0 ⇔ x = 0; x = ±√3

+ Giới hạn tại vô cực:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↘	-3	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	$+\infty$

Kết luận: Hàm số đồng biến trên (-√3; 0) và (√3; +∞).

Hàm số nghịch biến trên (-∞; -√3) và (0; √3).

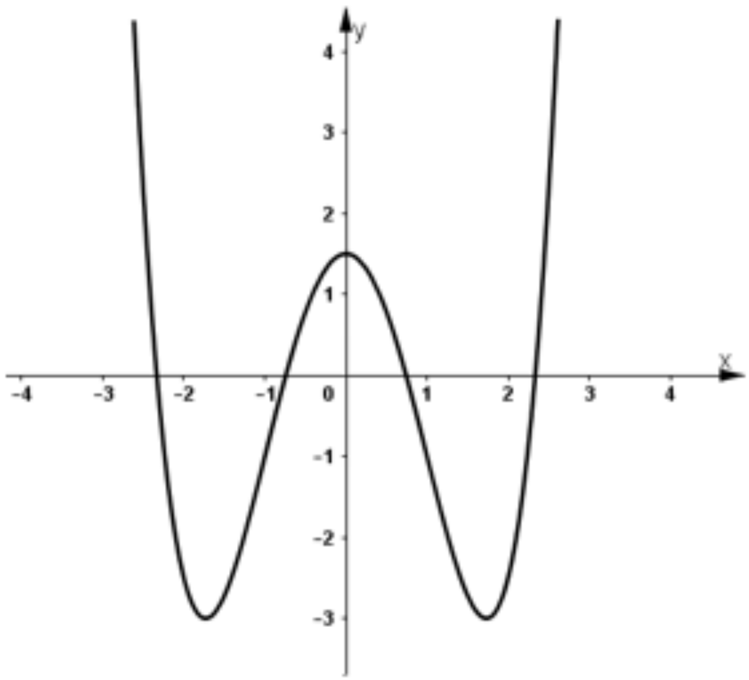
Hàm số đạt cực đại tại x = 0, $y_{CĐ}=\frac{3}{2}$

Hàm số đạt cực tiểu tại x = $\pm\sqrt{3}$; y_{CT} = -3.

- Đồ thị:

+ Đồ thị hàm số nhận trục tung là trục đối xứng.

+ Đồ thị cắt trục tung tại (0; 1,5).



b) Ta có: f''(x) = $6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$

f''(x) = 0 ⇔ $6(x^2 - 1)$ ⇔ x = ±1 ⇒ y = -1

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại (-1; -1) là:

y = f'(-1)(x + 1) - 1 ⇒ y = 4x + 3

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại (1; -1) là:

y = f'(1)(x - 1) - 1 ⇒ y = -4x + 3

c) Ta có: $x^4 - 6x^2 + 3 = m$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} = \frac{m}{2}$$

Số nghiệm của phương trình (*) chính bằng số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) y = m/2.

Từ đồ thị (C) nhận thấy :

+ m/2 < - 3 ⇔ m < -6

⇒ đường thẳng (d) không cắt đồ thị (C)

⇒ Phương trình vô nghiệm.

+ m/2 = -3 ⇔ m = -6

⇒ đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm cực tiểu

⇒ Phương trình có 2 nghiệm.

+ -3 < m/2 < 3/2 ⇔ -6 < m < 3

⇒ đường thẳng (d) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt

⇒ Phương trình có 4 nghiệm.

+ m/2 = 3/2 ⇔ m = 3

⇒ đường thẳng (d) cắt (C) tại ba điểm

⇒ phương trình có 3 nghiệm.

+ m/2 > 3/2 ⇔ m > 3

⇒ đường thẳng (d) cắt (C) tại hai điểm

⇒ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Vậy:

+) m < - 6 thì phương trình vô nghiệm.

+) m = - 6 hoặc m > 3 thì PT có 2 nghiệm.

+) m = 3 thì PT có 3 nghiệm.

+) – 6 < m < 3 thì PT có 4 nghiệm.

Bài 10 (trang 46 SGK Giải tích 12): Cho hàm số

$$y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1 \text{ (m tham số)}$$

có đồ thị là (C_m).

a) Biện luận theo m số cực trị của hàm số.

d) Với giá trị nào của m thì (C_m) cắt trục hoành?

c) Xác định để (C_m) có cực đại, cực tiểu.

Lời giải:

a) $y' = -4x^3 + 4mx = 4x(m - x^2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(m - x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$

$y'' = -12x^2 + 4m$.

- Nếu $m \le 0$, phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Mà $y''(0) = 4m < 0$

$\Rightarrow$ x = 0 là điểm cực đại và là cực trị duy nhất của hàm số.

- Nếu m > 0 thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 nên phương trình y'= 0 có 3 nghiệm

$\Rightarrow$ hàm số có 3 cực trị.

b) – Xét $m \le 0$, phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$1-2m$	$\searrow$	

(C_m) cắt trục hoành ⇔ $1 - 2m \geq 0$

⇔ $m \leq \frac{1}{2}$ (thỏa mãn với mọi $m \leq 0$) (1)

- Xét $m > 0$, phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm 0 ; $\pm\sqrt{m}$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$(m-1)^2$	$\searrow$	$1-2m$	$\nearrow$	$(m-1)^2$	$\searrow$	$-\infty$

(C_m) cắt trục hoành ⇔ $(m - 1)^2 \geq 0$ (thỏa mãn với mọi m) (2)

Kết hợp (1) và (2) suy ra (C_m) cắt trục hoành với mọi $m \in R$.

c) Dựa vào bảng biến thiên phần b) ta có :

(C_m) có cực đại, cực tiểu ⇔ $m > 0$

Bài 11 (trang 46 SGK Giải tích 12): a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của đường thẳng $y = 2x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N.

c) Xác định m sao cho độ dài MN nhỏ nhất.

d) Tiếp tuyến tại một điểm S bất kì của C cắt hai tiệm cận của C tại P và Q. Chứng minh rằng S là trung điểm của PQ.

Lời giải:

a) Khảo sát hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+1}$

- TXĐ: D = R \ {-1}

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0 \ \forall x \in D.$$

⇒ Hàm số nghịch biến trên các khoảng (-∞; -1) và (-1; +∞).

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x \to (-1)^-} \frac{x+3}{x+1} = -\infty; \ \lim_{x \to (-1)^+} \frac{x+3}{x+1} = +\infty$$

⇒ x = -1 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+3}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3$$

⇒ y = 3 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

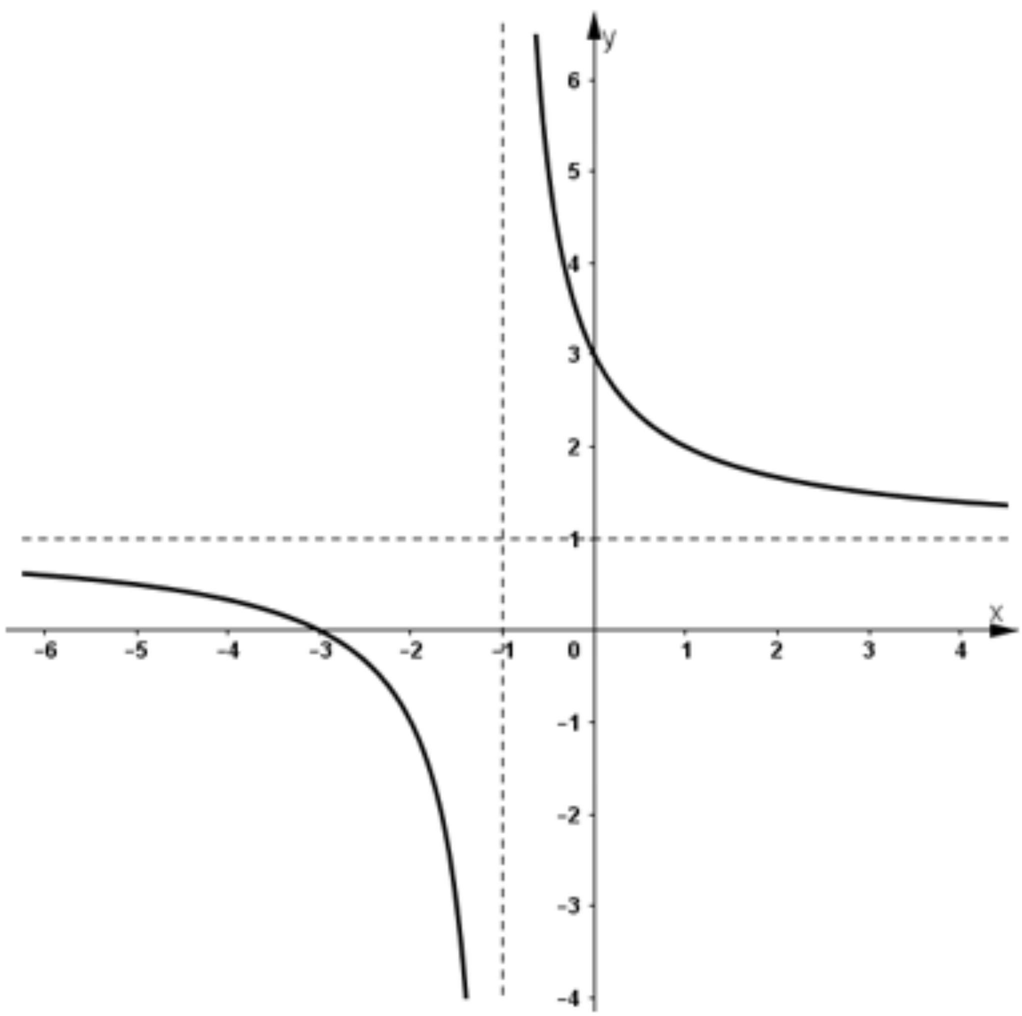
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

- Đồ thị:

+ Giao với Ox: (-3; 0)

+ Giao với Oy: (0; 3)

+ Đồ thị hàm số nhận (-1; 1) là tâm đối xứng.



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng (d) $y = 2x + m$ là:

$$\frac{x+3}{x+1} = 2x + m$$

$\Leftrightarrow (2x + m)(x + 1) = x + 3$

$\Leftrightarrow 2x^2 + mx + 2x + m = x + 3$

$\Leftrightarrow 2x^2 + (m + 1)x + m - 3 = 0$ (*)

Để (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = (m + 1)^2 - 8(m - 3) > 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 25 > 0$

$\Leftrightarrow (m - 3)^2 + 16 > 0$

Đúng với $\forall m \in R$.

Vậy với mọi $m \in R$, (d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt MN.

c) Gọi $M(x_M; y_M)$; $N(x_N; y_N)$

$\Rightarrow x_M; x_N$ là nghiệm của phương trình (*).

Theo hệ thức Vi-et ta có :

$$\begin{cases} x_M + x_N = -\dfrac{m+1}{2} \\ x_M.x_N = \dfrac{m-3}{2} \end{cases}$$

$$MN^2$$

$$= (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2$$

$$= (x_M - x_N)^2 + (2x_M + m - 2x_N - m)^2$$

$$= 5.(x_M - x_N)^2$$

$$= 5.(x_M + x_N)^2 - 20x_M.x_N$$

$$= 5.\left(-\frac{m+1}{2}\right)^2 - 20.\frac{m-3}{2}$$

$$= \frac{5}{4}m^2 - \frac{15}{2}m + \frac{125}{4}$$

$$= \frac{5}{4}.(m^2 - 6m + 9) + 20$$

$$= \frac{5}{4}.(m-3)^2 + 20 \geq 20.$$

Dấu "=" xảy ra ⇔ m - 3 = 0 ⇔ m = 3

Vậy độ dài MN nhỏ nhất khi m = 3.

d) Gọi $S\left(x_0;\dfrac{x_0+3}{x_0+1}\right)$ là điểm thuộc (C).

+ Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại S là:

$$y=\frac{-2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+3}{x_0+1}$$

+ Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng x = -1 là:

Tại x = -1 thì

$$y=\frac{-2}{(x_0+1)^2}(-1-x_0)+\frac{x_0+3}{x_0+1}=\frac{x_0+5}{x_0+1}$$

⇒ Giao điểm $P\left(-1;\dfrac{x_0+5}{x_0+1}\right)$

+ Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang y = 1:

Tại y = 1

$$\Rightarrow \frac{-2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+3}{x_0+1}=1$$

$$\Rightarrow x=2x_0+1$$

⇒ Giao điểm $Q(2x_0 + 1; 1)$

Ta có:

$$\begin{cases} x_P+x_Q=2x_0-1+1=2x_0=2.x_S \\ y_P+y_Q=\dfrac{x_0+5}{x_0+1}+1=\dfrac{2x_0+6}{x_0+1}=2.y_S \end{cases}$$

⇒ S là trung điểm PQ (đpcm).

Bài 12 (trang 47 SGK Giải tích 12): Cho hàm số

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+6$$

a) Giải phương trình f'(sin x) = 0.

b) Giải phương trình f''(cos x) = 0.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình f''(x) = 0.

Lời giải:

a) Ta có: $f'(x) = x^2 - x - 4$

$\Rightarrow f'(\sin x) = \sin^2 x - \sin x - 4$.

f'(sin x) = 0

$\Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

Vì $\sin x\in[-1;1]$ với $\forall x\in R$,

mà $\frac{1+\sqrt{17}}{2}>1$; $\frac{1-\sqrt{17}}{2}<-1$

Do đó phương trình vô nghiệm.

b) Ta có: f''(x) = 2x - 1

$\Rightarrow$ f''(cosx) = 2cos x – 1.

f''(cos x) = 0

$\Leftrightarrow$ 2cosx - 1 = 0

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k.2\pi$.

c) $f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

⇒ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ x = 1/2 là:

$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow y = \frac{-17}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{47}{12}$

hay $y = \frac{-17}{4}x + \frac{145}{24}$.