GIẢI BÀI TẬP SGK TOÁN 11 BÀI 4: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

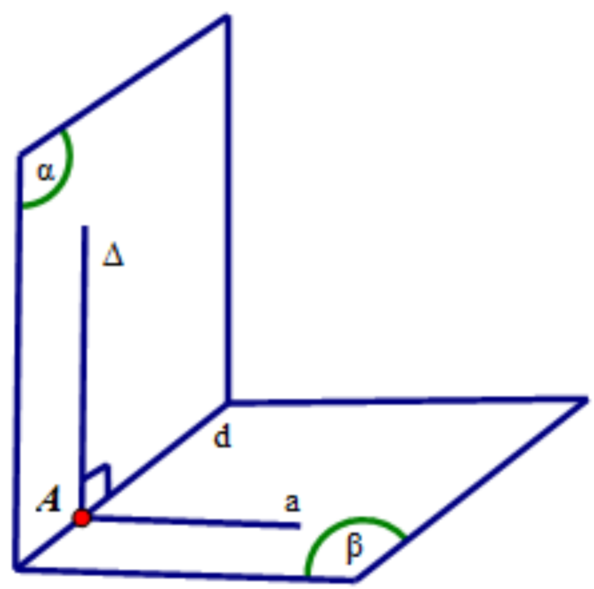
Bao gồm 2 phần chính: Hướng dẫn trả lời các câu hỏi ôn tập và bài tập ứng dụng SGK Toán hình lớp 11.

Trả lời câu hỏi SGK Toán 11 Bài 4:

Trả lời câu hỏi Toán 11 Hình học Bài 4 trang 109 (1)

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Chứng minh rằng nếu có một đường thẳng Δ nằm trong (α) và Δ vuông góc với d thì Δ vuông góc với (β)

Lời giải



Δ nằm trong (α) và Δ vuông góc với d ⇒ Δ cắt d tại A

Từ A, vẽ đường thẳng a thuộc (β) và a ⊥ d

Khi đó góc giữa 2 mp (α) và (β) bằng góc giữa hai đường thẳng Δ và a.

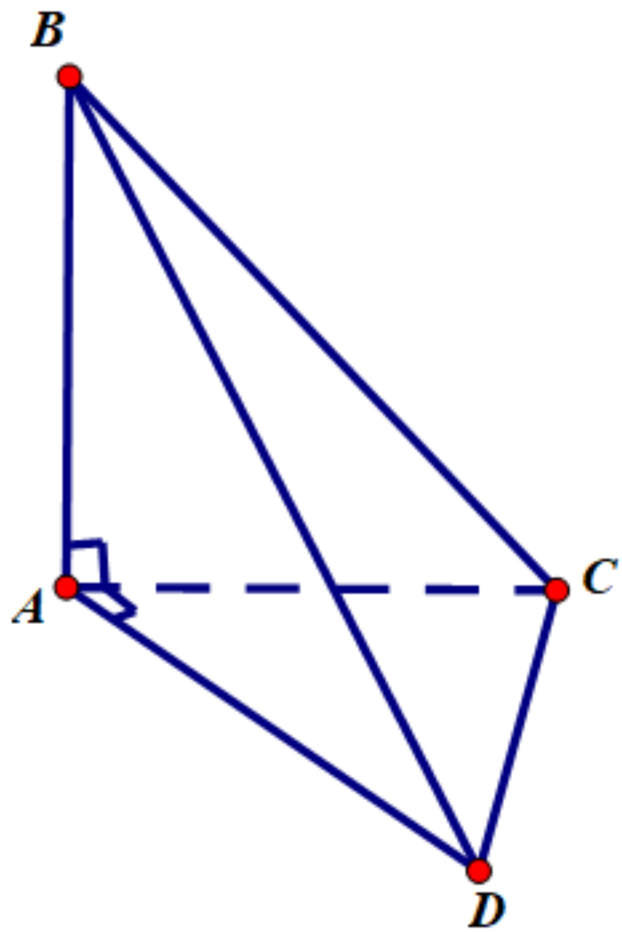
Vì (α) ⊥ (β) nên góc giữa Δ và a là 90° hay Δ ⊥ a

⇒ Δ ⊥ (d,a) hay Δ ⊥ (β)

Trả lời câu hỏi Toán 11 Hình học Bài 4 trang 109 (2):

Cho tứ diện ABCD có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ADB) cũng đôi một vuông góc với nhau.

Lời giải



AB ⊥ AC, AB ⊥ AD nên AB ⊥ (AC, AD) hay AB ⊥ (ACD) (theo định lí trang 99)

AB ⊂ (ABC) nên (ABC) ⊥ (ACD) (theo định lí 1 trang 108)

AB ⊂ (ADB) nên (ADB) ⊥ (ACD)

AD ⊥ AC, AD ⊥ AB nên AD ⊥ (AC, AB) hay AD ⊥ (ABC)

AD ⊂ (ADB) nên (ADB) ⊥ (ABC)

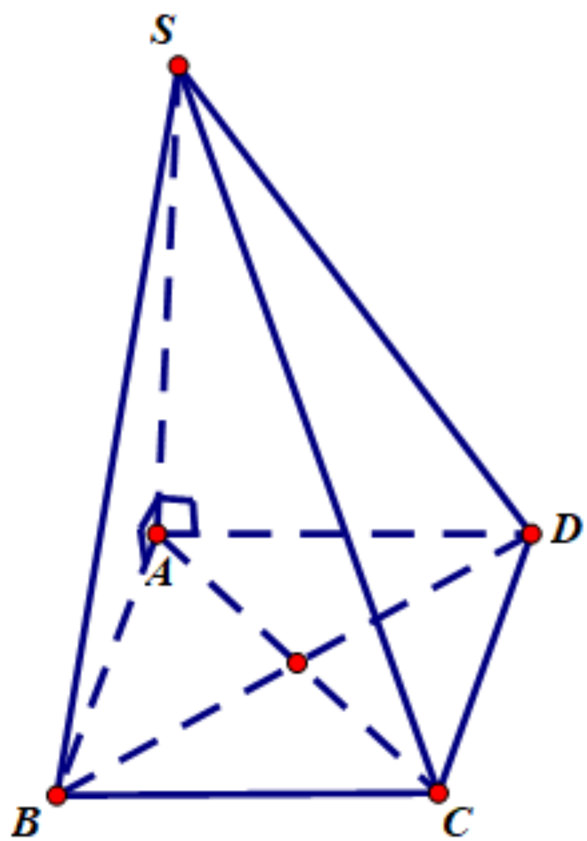
Trả lời câu hỏi Toán 11 Hình học Bài 4 trang 109 (3)

Cho hình vuông ABCD. Dựng đoạn AS vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông ABCD.

a) Hãy nêu tên các mặt phẳng lần lượt chứa các đường thẳng SB, SC, SD và vuông góc với mặt phẳng (ABCD)

b) Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD)

Lời giải



a) SA ⊥ (ABCD), SA ⊂ (SAB) ⇒ (SAB) ⊥ (ABCD)

SA ⊥ (ABCD), SA ⊂ (SAD) ⇒ (SAD) ⊥ (ABCD)

SA ⊥ (ABCD)⇒SA ⊥ BD ⊂(ABCD) và BD ⊥ AC(hai đường chéo hình vuông)

⇒BD ⊥ (SA,AC)⇒BD ⊥ (SAC) mà BD ⊂(ABCD) nên (SAC) ⊥ (ABCD)

b) BD ⊥ (SAC) mà BD ⊂(SBD) nên (SAC) ⊥ (SBD)

Trả lời câu hỏi Toán 11 Hình học Bài 4 trang 111 (1):

Cho biết mệnh đề nào sau đây là đúng ?

a) Hình hộp là hình lăng trụ đứng

b) Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng

c) Hình lăng trụ là hình hộp

d) Có hình lăng trụ không phải là hình hộp

Lời giải

a sai, b đúng, c sai, d đúng

Hình hộp là hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành

Trả lời câu hỏi Toán 11 Hình học Bài 4 trang 111 (2):

Sáu mặt của hình hộp chữ nhật có phải là những hình chữ nhật không ?

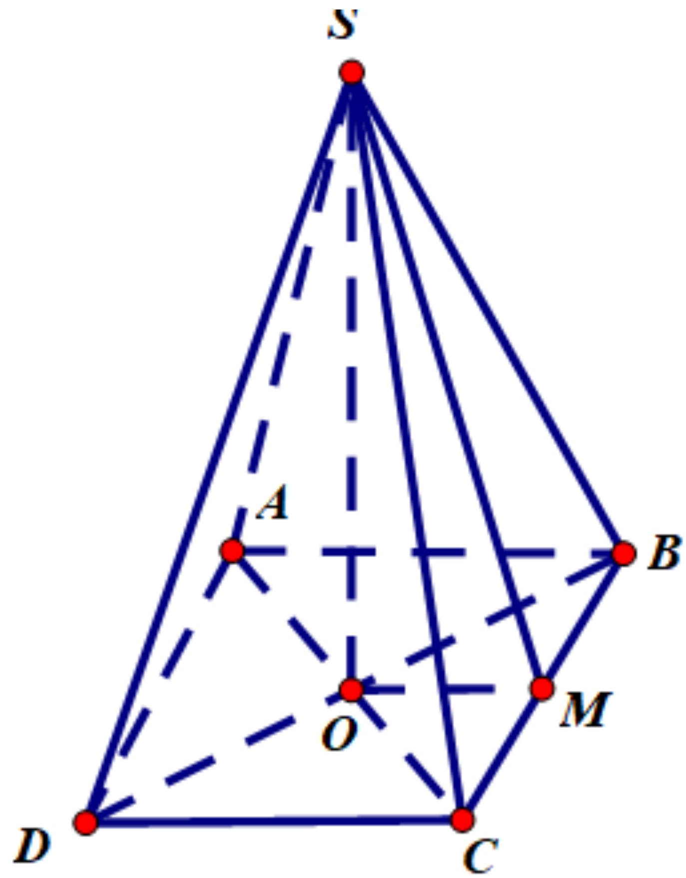
Lời giải

Sáu mặt của hình hộp chữ nhật là những hình chữ nhật.

Trả lời câu hỏi Toán 11 Hình học Bài 4 trang 112 (1):

Chứng minh rằng hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau

Lời giải



Xét trường hợp Hình chóp tứ giác đều

Ta có đáy là hình vuông ABCD

Tâm hình vuông ABCD là O (giao điểm 2 đường chéo)

Gọi M là trung điểm BC ⇒ OM // AB hay OM ⊥ BC

Theo định nghĩa hình chóp đều, SO ⊥ (ABCD) ⇒ SO ⊥ BC

⇒ BC ⊥(SO,OM) ⇒ BC⊥(SOM) ⇒ BC⊥SM

Tam giác SBC có SM vừa là đường cao vừa là trung tuyến ⇒ SBC cân tại S

Chứng minh tương tự ⇒ Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau

Trường hợp hình chóp đều khác, chứng minh tương tự

Trả lời câu hỏi Toán 11 Hình học Bài 4 trang 112 (2):

Có tồn tại một hình chóp tứ giác S.ABCD có hai mặt bên (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy hay không ?

Lời giải

Không tồn tại một hình chóp tứ giác S.ABCD có hai mặt bên (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy

Giải bài tập SGK Bài 4: hai mặt phẳng vuông góc lớp 11

Bài 1 (trang 113 SGK Hình học 11):

Cho ba mặt phẳng (α), (β), (γ), những mệnh đề nào sau đây đúng?

a) Nếu $(\alpha) \perp (\beta)$ và $(\alpha) // (\gamma)$ thì $(\beta) \perp (\gamma)$.

b) Nếu $(\alpha) \perp (\beta)$ và $(\alpha) \perp (\gamma)$ thì $(\beta) // (\gamma)$.

Lời giải:

a) Đúng.

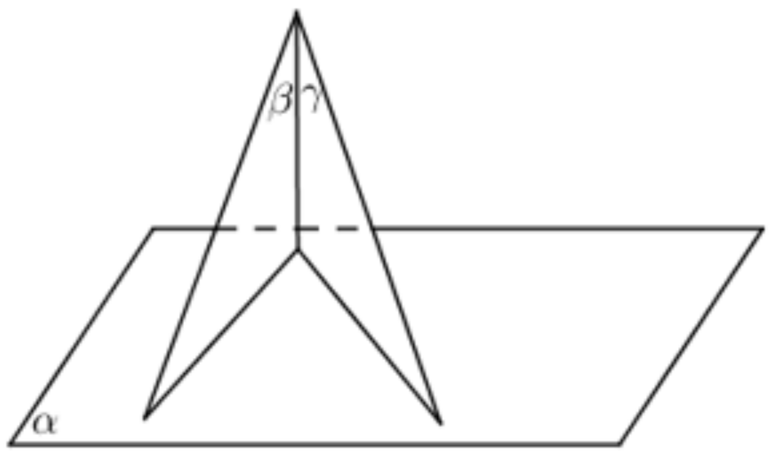
$(\alpha) \perp (\beta) \Rightarrow \exists$ đường thẳng $d \subset (\beta)$ và $d \perp (\alpha)$.

Mà $(\alpha) // (\gamma)$

$\Rightarrow d \perp (\gamma)$

$\Rightarrow (\beta) \perp (\gamma)$.

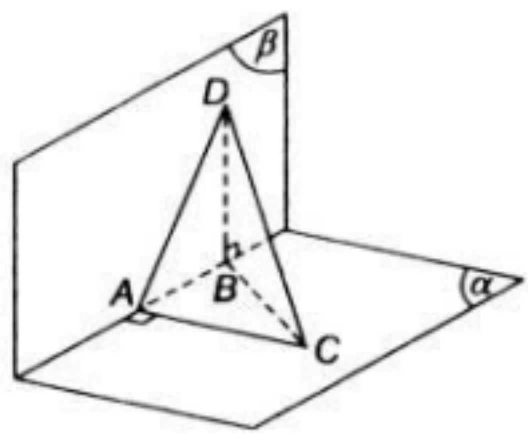
b) Sai, vì hai mặt phẳng (β), (γ) cùng vuông góc với mp(α) có thể song song hoặc cắt nhau.



Bài 2 (trang 113 SGK Hình học 11):

Cho hai mặt phẳng (α), (β) vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng đó hai điểm A và B sao cho AB = 8cm. Gọi C là một điểm trên (α) và D là một điểm trên (β) sao cho AC và BD cùng vuông góc với giao tuyến Δ và AC = 6cm, BD = 24cm. Tính độ dài đoạn CD.

Lời giải:



Nối AD, CD ta có:

$DB \perp \Delta$ nên tam giác ABD vuông tại B.

Áp dụng định lí Py-ta- go ta có:

$AD^2 = AB^2 + BD^2$

$$\begin{cases} (\alpha), (\beta) \text{ vuông góc, cắt nhau theo giao tuyến } \Delta \\ AC \subset (\alpha); AC \text{ vuông góc } \Delta \end{cases}$$

$\Rightarrow AC \perp (\beta)$

Mà $AD \subset (\beta) \Rightarrow AC \perp AD$

Suy ra, tam giác ACD vuông tại A. Áp dụng định lí py- ta- go ta có:

$CD^2 = AC^2 + AD^2 = AC^2 + (AB^2+BD^2)$

$=6^2+8^2+24^2=676$

Vậy CD = 26 cm

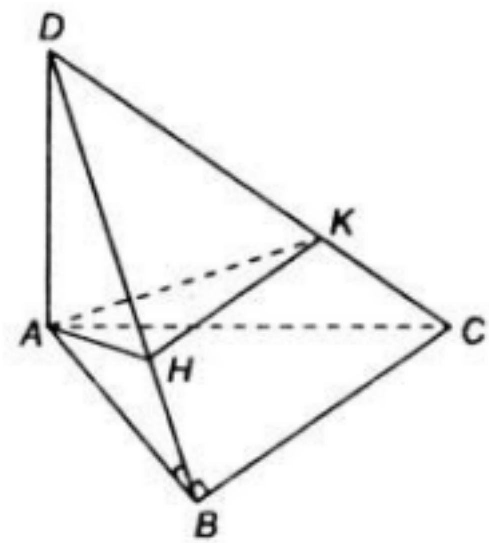
Bài 3 (trang 113 SGK Hình học 11): Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông ở B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với (α) tại A. Chứng minh rằng:

a) (ABD) là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC)

b) Mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (BCD)

c) HK // BC với H và K lần lượt là giao điểm của DB và DC với mp(P) đi qua A và vuông góc với DB.

Lời giải:


D
K
A
C
H
B

a) Chứng minh ABD là góc giữa hai

mặt phẳng (ABC) và (DBC)

Ta có:

- $(ABC) \cap (DBC) = BC$ (1)
- $AB \perp BC\ (AB \subset (ABC))$ (2)
- $\begin{cases} BC \perp AB \text{ (tam giác vuông ở B)} \\ BC \perp DA \text{ (vì } DA \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp DB$ hay $DB \perp BC\ (DB \subset (DBC))$ (3)

*(1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) (đpcm)

Chú ý: $\widehat{ABD} < 90°$ vì tam giác ABD vuông ở A.

b) Chứng minh $(ABD) \perp (BCD)$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABD)$

$\Rightarrow (BCD) \perp (ABD)$ (đpcm)

c) Chứng minh HK // BC

- $mp(P) \equiv mp(AHK)$

*Theo giả thiết, ta có $mp(AHK) \perp DB \Rightarrow HK \perp DB$ (4)

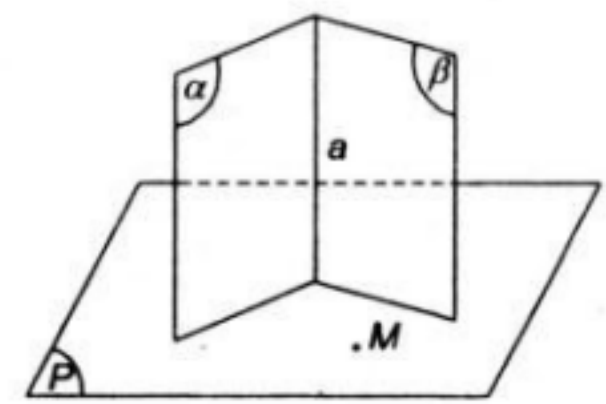
*Theo chứng minh ở câu a, ta có $BC \perp DB$ (5)

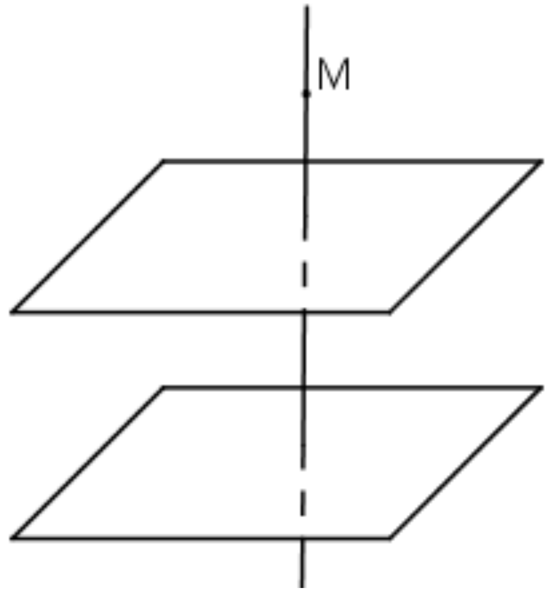
*HK, BC, DB cùng ở trong mp(DBC) (6)

- (4), (5), (6) $\Rightarrow$ HK // BC (đpcm)

Bài 4 (trang 114 SGK Hình học 11): Cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau và một điểm M không thuộc (α) và (β). Chứng minh rằng qua điểm M có một và chỉ một mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β). Nếu (α) // (β) thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào?

Lời giải:





Từ M kẻ MH ⊥ (α) và MK ⊥ (β)

Gọi Δ là giao tuyến của (α) và (β)

$$\left.\begin{matrix} MH \perp \alpha \\ \Delta \subset (\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MH \perp \Delta \qquad (1)$$

Tường tự ta có: MK ⊥ Δ (2)

Từ (1) và (2) suy ra Δ ⊥ (MHK)

$$\left.\begin{matrix} \Delta \perp (MHK) \\ \Delta \subset (\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (MHK) \perp (\alpha)$$

Chứng minh tương tự, ta có (MHK) ⊥ (β)

Vậy (MHK) chính là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với (α) và (β).

Kết quả: Mặt phẳng (P) cần dựng (tức mp(MHK)) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ.

Vì qua một điểm chỉ có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước nên (P) là duy nhất.

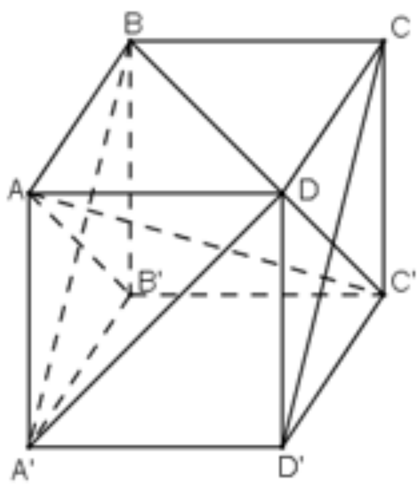
Nếu (α) // (β) thì qua M ta chỉ có thể vẽ một đường thẳng Δ vuông góc với (α) và (β). Bất kì mặt phẳng (P) nào chứa Δ cũng đều vuông góc với (α), (β). Trường hợp này, qua M có vô số mặt phẳng vuông góc với (α), (β).

Bài 5 (trang 114 SGK Hình học 11): Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (AB'C'D) vuông góc với (BCD'A')

b) Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng (A'BD)

Lời giải:



a) Theo tính chất hình lập phương ta có:

$$\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp \mathrm{AA'} \\ AB, \mathrm{AA'} \subset \mathrm{(ABB'A')} \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABB'A')$$

Mà $A'B \subset (ABB'A') \Rightarrow AD \perp A'B$ (1)

* Lại có: $AB' \perp A'B$ (tính chất đường chéo của hình vuông) (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$A'B \perp (AB'C'D) \Rightarrow (BCD'A') \perp (AB'C'D)$$

b) Chứng minh $AC' \perp (A'BD)$

Ta có:

$$\left.\begin{matrix} A'B \perp AB' (\text{hình vuông } AA'B'B) \\ A'B \perp AD \ (\text{vì } AD \perp (AA'B'B)) \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow A'B \perp (AB'C'D)$

$\Rightarrow A'B \perp AC'$ (3)

$$\left.\begin{matrix} BD \perp AC \ (\text{hình vuông } ABCD) \\ BD \perp AA' (AA' \perp (ABCD)) \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow BD \perp (ACC'A')$

$\Rightarrow BD \perp AC'$ (4)

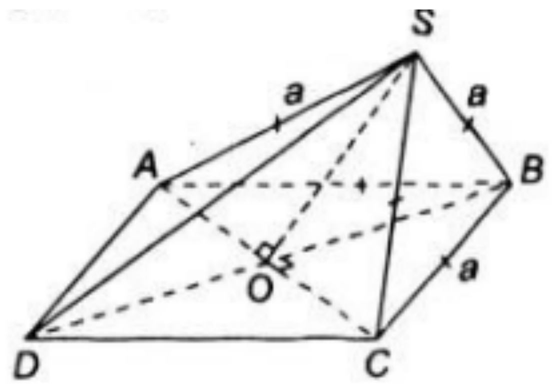
(3) và (4) $\Rightarrow AC' \perp (A'BD)$ (đpcm)

Bài 6 (trang 114 SGK Hình học 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a và có SA = SB = SC = a. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

b) Tam giác SBD là tam giác vuông.

Lời giải:



a) Chứng minh $(ABCD) \perp (SBD)$

$$\begin{cases} \text{Gọi } O = AC \cap BD.\text{ Ta có:} \\ SO \perp AC \text{ (SO là trung tuyến tam giác cân ở SAC} \\ BD \perp AC \text{ (đường chéo hình thoi)} \\ SO, BD \text{ cắt nhau trong } (SBD) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow AC \perp (SBD) \\ \text{mà } AC \subset (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ABCD) \perp (SBD)$$

b) Chứng minh ΔSBD vuông:

Đặt $AO = x$

- ΔAOB vuông tại O nên:

$OB^2 = AB^2 - AO^2 = a^2 - x^2$.

- ΔSOA vuông tại O nên:

$SO^2 = SA^2 - AO^2 = a^2 - x^2$.

Vậy $OD^2 = OB^2 = OS^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow OD = OB = OS$

ΔSBD có trung tuyến $SO = \frac{1}{2}BD$ nên:

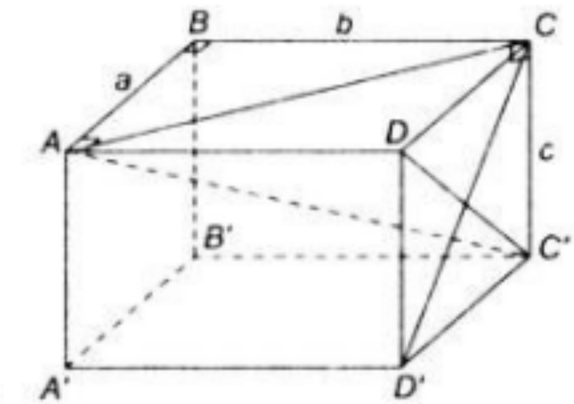
ΔSBD tam giác vuông tại S.

Bài 7 (trang 114 SGK Hình học 11): Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Có AB = a, BC= b, CC'= c.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (ADC'B') vuông góc với mặt phẳng (ABB'A').

b) Tính độ dài đường chéo AC' theo a, b và c.

Lời giải:



a) Theo tính chất hình hộp chữ nhật, ta có:

$$\begin{cases} B'C' \perp BB' \\ B'C' \perp AB \\ BB' \cap AB = B; BB', AB \subset (ABB'A') \end{cases}$$

$$\Rightarrow B'C' \perp (ABB'A')$$

Mà $B'C' \subset (ADC'B') \Rightarrow (ABB'A') \perp (ADC'B')$

b) $B'C' \perp (ABB'A') \Rightarrow B'C' \perp AB'$

+ Trong tam giác vuông AB'C', áp dụng định lí Pyta go ta có:

$AC'^2 = AB'^2 + B'C'^2$ (1)

+ Trong tam giác vuông ABB', áp dụng định lí Py ta go ta có:

$AB'^2 = AB^2 + BB'^2$ (2)

* Từ (1) và (2) suy ra: $AC'^2 = AB^2 + BB'^2 + B'C'^2 = a^2 + c^2 + b^2$

$$\Rightarrow AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bài 8 (trang 114 SGK Hình học 11): Tính độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh a.

Lời giải:

+ Hình lập phương là hình hộp chữ nhật với a = b = c.

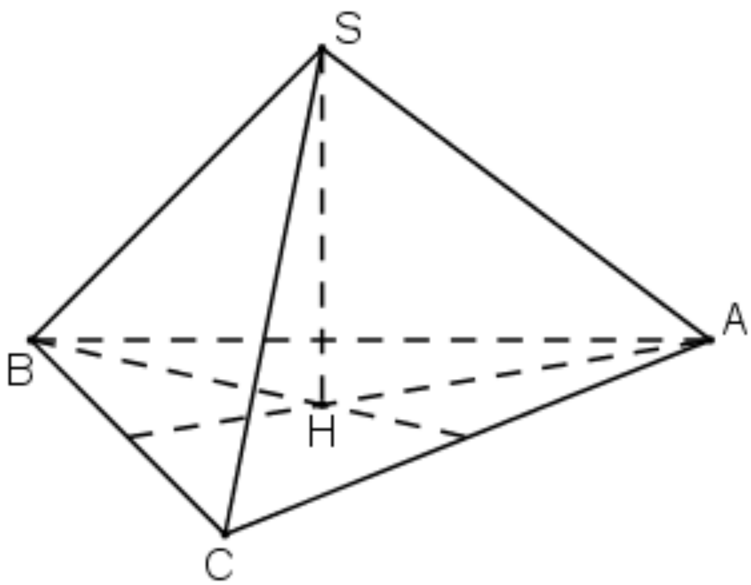
Áp dụng kết quả bài 7b) ta có:

Độ dài đường chéo hình lập phương là:

$$\sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

Bài 9 (trang 114 SGK Hình học 11)): Cho hình hộp tam giác đều S.ABC có SH là đường cao. Chứng minh SA vuông góc với BC và SB vuông góc với AC.

Lời giải:



S.ABC là hình chóp tam giác đều

⇒ ΔABC đều và H là tâm của ΔABC.

+ Ta có: AH ⊥ BC

Mà AH là hình chiếu của SA trên (ABC)

⇒ BC ⊥ SA (định lí ba đường vuông góc)

+ Lại có : AC ⊥ BH.

BH là hình chiếu của SB trên (ABC)

⇒ AC ⊥ SB (định lí ba đường vuông góc)

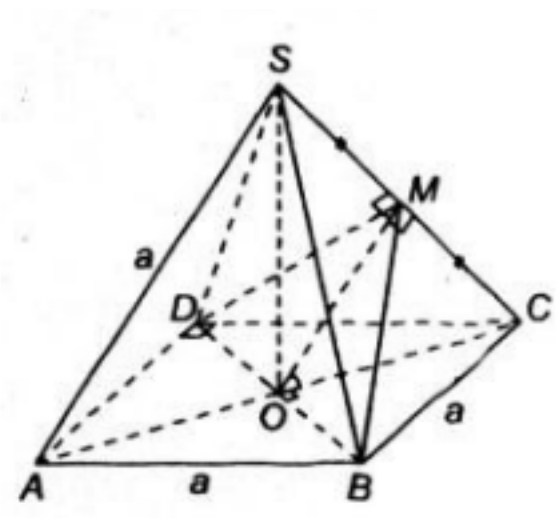
Bài 10 (trang 114 SGK Hình học 11): Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

a) Tính độ dài đoạn SO.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn SC. Chứng minh hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) vuông góc với nhau.

c) Tính độ dài đoạn OM và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

Lời giải:



a) Theo giả thiết, S.ABCD là hình chóp đều và đáy ABCD là hình vuông nên SO ⊥ (ABCD) (tính chất hình chóp đều)

Đáy ABCD là hình vuông cạnh a nên

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Tam giác SOA vuông tại O, áp dụng định lí Py- ta- go ta có:

$SA^2 = SO^2 + OA^2 \Rightarrow SO^2 = SA^2 - OA^2$

$$= a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

b) $SO \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} SO \perp DB \\ AC \perp DB \end{matrix}\right\} \Rightarrow DB \perp (SAC)$$

mà $BD \subset (MBD)$ nên $(SAC) \perp (MBD)$

c) Ta có : $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}, OC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = OC$

$\Rightarrow$ Tam giác SOC là vuông cân đỉnh O,

OM là trung tuyến ứng với cạnh huyền SC nên

$OM = \frac{SC}{2} \Rightarrow OM = \frac{a}{2}$

Hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD) giao nhau

theo giao tuyến BD vì $BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow OM \perp BD$ và $OC \perp BD$.

Suy ra $\widehat{MOC}$ là :

góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

Từ đây dễ thấy $\widehat{MOC} = 45°$ vì tam giác SOC vuông cân

=> Góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD) là 45^o

Bài 11 (trang 114 SGK Hình học 11):

Cho hình chóp S.ABCD .

có đáy ABCD là một hình thoi tâm I,

cạnh a và góc $\widehat{A} = 60°$,

cạnh SC bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc

với mặt phẳng ABCD.

a)Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc

với mặt phẳng (SAC)

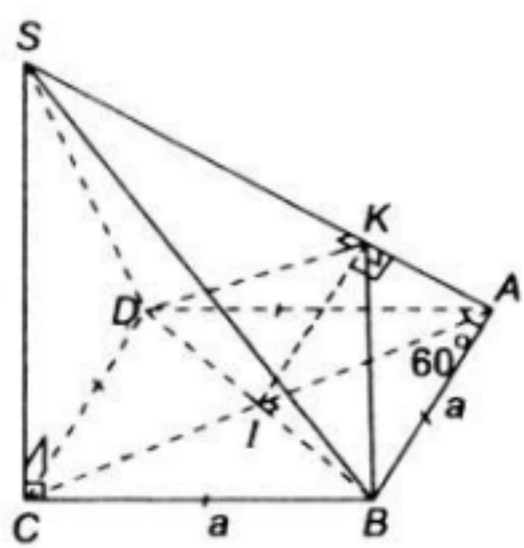
b) Trong tam giác SCA kẻ IK vuông góc với

AS tại K. Hãy tính độ dài IK.

c) Chứng minh $\widehat{BKD}$ =90° và từ đó suy ra

mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAD).

Lời giải:



a) Chứng minh $(SBD) \perp (SAC)$:

Ta có: $SC \perp (ABCD) \Rightarrow SC \perp BD$

Mà $AC \perp BD$ (tính chất hai đường chéo của hình thoi)

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $BD \subset (SBD)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$

b) Tính IK:

ΔABD có $AB = AD = a$

$\widehat{BAD} = 60°$ nên là tam giác đều suy ra $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$SC \perp (ABCD)$ nên $SC \perp CA$.

Xét Δ SAC và Δ IAK có:

$$\begin{cases} \widehat{SCA} = \widehat{IKA} = 90^0 \\ \hat{A} chung \end{cases} \Rightarrow \text{hai tam giác SAC và IAK đồng dạng (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{IK}{SC} = \frac{AI}{AS} \Rightarrow IK = \frac{SC.AI}{SA}$$

Mà $SA = \sqrt{SC^2 + CA^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{4} + 3a^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $IK = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{3a^2\sqrt{2}}{4}.\dfrac{2}{3a\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2}$

c) Chứng minh $\widehat{BDK} = 90^o$, suy ra (SAB) $\perp$ (SAD)

Ta có $IK = \dfrac{a}{2} = \dfrac{BD}{2}$

Tam giác BKD có đường trung tuyến KI bằng một nửa cạnh tương ứng BD

nên tam giác BKD là tam giác vuông tại K.

Suy ra $\widehat{BKD} = 90°$

$$\left.\begin{array}{r} SA \perp IK \\ BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA \\ IK, BD \text{ cắt nhau trong } (BKD) \end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp (BKD)$$

Vậy :f

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp KD \\ SA \perp KB \\ SA = (SAB) \cap (SAC) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

góc giữa (SAB), (SAD) là $\widehat{BKD} = 90°$

Suy ra $(SAB) \perp (SAD)$