

Bài 1: (2 điểm) Với $x \geq 0, x \neq 9$ cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$$

$$\text{và } B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 3}{x - 9}$$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{25}{16}$

b) Rút gọn biểu thức B

c) Tìm các giá trị của x để $\frac{B}{A} < \frac{-1}{3}$

Bài 2: (2 điểm) Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 80m. Nếu tăng chiều dài thêm 3m, tăng chiều rộng thêm 5m thì diện tích của mảnh đất tăng thêm 195m². Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.

Bài 3: (2 điểm)

1. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-2} + 3\sqrt{y-3} = 14 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y-3} = 5 \end{cases}$$

2. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} -2mx + y = 5 \\ mx + 3y = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Xác định giá trị của m để hệ (1) có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn: $x - y = 2$

Bài 4. (3,5 điểm) Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho $AP > R$. Từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M.

a) Chứng minh rằng 4 điểm A, P, M, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $BM \parallel OP$.

c) Đường thẳng vuông góc với AB ở O cắt tia BM tại N. Chứng minh tứ giác OBNP là hình bình hành.

d) Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I, PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh 3 điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài 5 (0,5 điểm) Giải phương trình: $x^2 + 4x + 7 = (x + 4)\sqrt{x^2 + 7}$

Bài 1: (2 điểm)

a) Với $x = \frac{25}{16}$ ta có:

$$A = \frac{\frac{5}{4} + 1}{\frac{5}{4} - 3} = \frac{-9}{7}$$

b) Với $x \geq 0, x \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 3}{x - 9} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) + \sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) - 3x - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \\ &= \frac{-3\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \\ &= \frac{-3(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \end{aligned}$$

c) Với $x \geq 0, x \neq 9$ ta có:

$$\frac{B}{A} = \frac{-3(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{-3}{\sqrt{x} + 3}$$

Để $\frac{B}{A} < \frac{-1}{3}$ tương đương với:

$$\frac{-3}{\sqrt{x} + 3} < \frac{-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 3} > \frac{1}{3} \text{ vì } \sqrt{x} + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 < 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 6$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x < 36, x \neq 9$$

KL...

Bài 2: (2 điểm)

Gọi chiều dài và chiều rộng mảnh đất lần lượt là X và Y (mét; $X, Y > 0$)

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} 2(X + Y) = 80 \\ (X + 3)(Y + 5) - XY = 195 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 40 \\ 5X + 3Y + 15 = 195 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X + Y = 40 \\ 5X + 3Y = 180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 30 \text{ (m)} \\ Y = 10 \text{ (m)} \end{cases}$$

(tm)

KL...

Bài 3: (2 điểm)

1.

ĐKXĐ: $x \geq 2; y \geq 3$. Ta có:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-2} + 3\sqrt{y-3} = 14 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y-3} = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{y-3} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ y - 3 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 19 \end{cases} \text{ (tm)}$$

KL....

2.

a)

Vì PA, PM là tiếp tuyến lần lượt tại A và M của (O) nên $\angle PAO = \angle PMO = 90^\circ$

Suy ra A và M cùng thuộc đường tròn đường kính PO hay 4 điểm A, P, M, O cùng nằm trên một đường tròn (đpcm).

b)

Để chứng minh $\triangle OAP = \triangle OMP$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông) \Rightarrow
 $\angle POA = \angle POM = \frac{\angle AOM}{2}$

Lại có $\angle ABM = \frac{\angle AOM}{2} = \angle AOP \Rightarrow BM \parallel OP$ (đồng vị) (đpcm).

c)

Xét $\triangle ANB$ có NO là trung trực $\Rightarrow \triangle ANB$ cân tại N $\Rightarrow \angle ONA = \angle BNO = 90^\circ - \angle NBA = 90^\circ - \angle POA = \angle OPA$

$\Rightarrow ONPA$ là hình chữ nhật $\Rightarrow PN \parallel OA$ hay $PN \parallel OB$ hay tứ giác ONBP là hình bình hành (đpcm)

d) Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I, PN và OM kéo dài cắt nhau tại J. Chứng minh 3 điểm I, J, K thẳng hàng.

Xét $\triangle PJO$ có $PM \perp OJ$, $ON \perp PJ$ và PM cắt ON tại I hay I là trực tâm của $\triangle PJO \Rightarrow JI \perp PO$ (1)

Lại có AONP là hình chữ nhật $\Rightarrow \angle OPN = \angle POA = \angle POM$ hay $\triangle PJO$ cân tại J, có K là trung điểm PO suy ra $JK \perp PO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra 3 điểm I, J, K thẳng hàng (đpcm)

Bài 5 (0,5 điểm)

Ta có:

$$x^2 + 4x + 7 = (x + 4)\sqrt{x^2 + 7} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + 3 = (x + 4)\sqrt{x^2 + 7} \geq 3 > 0$$

$$\Rightarrow x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -4$$

Với $x > -4$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 7)^2 = (x + 4)^2(x^2 + 7)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 16x^2 + 49 + 8x^3 + 14x^2 + 56x = (x^2 + 8x + 16)(x^2 + 7)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 8x^3 + 30x^2 + 56x + 49 = x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 56x + 112$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 63 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \quad (\text{tm đkxd})$$

KL....