

Câu 1 (2,0 điểm): Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x(3+x) = 4$ b) $\begin{cases} 2x = y + 3 \\ 2y = 8 - 3x \end{cases}$

Câu 2 (2,0 điểm):

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(2 - \frac{2}{1-\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)$ với $x \geq 0; x \neq 1$

b) Cho đường thẳng (d) : $y = x + 1$ và đường thẳng (d') : $y = 2x - 2m - 1$.
Tìm m để đường thẳng (d) và đường thẳng (d') cắt nhau tại 1 điểm nằm trong góc phần tư thứ II.

Câu 3 (2,0 điểm):

a) Một người thợ dự định may 1000 chiếc khẩu trang trong một thời gian nhất định. Nhờ tăng năng suất lao động, nên mỗi ngày người đó may thêm được 30 chiếc khẩu trang so với kế hoạch. Do đó, chẳng những đã may vượt mức 170 chiếc khẩu trang mà còn hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày người đó dự định may được bao nhiêu chiếc khẩu trang?

b) Cho phương trình $x^2 + 6x + 6m - m^2 = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1^3 - x_2^3 + 2x_1^2 + 12x_1 + 72 = 0$$

Câu 4 (3,0 điểm):

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Tia AD cắt đường tròn (O) ở K (với K khác A). Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt đường thẳng FD tại M.

a) Chứng minh tứ giác ACDF nội tiếp.

b) AM cắt đường tròn (O) tại I (với I khác A).

Chứng minh $MC^2 = MI \cdot MA$ và tam giác CMD cân.

c) MD cắt BI tại N. Chứng minh ba điểm C, K, N thẳng hàng.

Câu 5 (1,0 điểm): Cho các số thực dương $a; b; c$ thỏa mãn $abc = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{b}{a^4 + c^4 + b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c}$.

----- Hết -----

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a)	$x(3+x)=1 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0.$	0,25
		Ta có: $a+b+c=1+3-4=0$	0,25
		$\Rightarrow x_1=1; x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4}{1}=-4$	0,25
		Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1=1; x_2=-4.$	0,25
	b)	$\begin{cases} 2x=y+3 \\ 2y=8-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-2y=6 \\ 3x+2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ 7x=14 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2.2-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$	0,25
		Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y)=(2; 1)$	0,25
2	a)	$P = \left(2 - \frac{2}{1-\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{x+2}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right); x \geq 0, x \neq 1$	0,25
		$P = \frac{2-2\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} : \left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+2}\right]$	
		$= \frac{-2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} : \frac{x+2-x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	
		$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot (\sqrt{x}-1)$	
			$= 2\sqrt{x}$
		Vậy $P = 2\sqrt{x}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1.$	0,25
b)		Tọa độ giao điểm của đường thẳng (d) : $y = x + 1$ và đường thẳng (d') : $y = 2x - 2m - 1$ là nghiệm của hệ phương trình:	0,5
		$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x - 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m + 2 \\ y = 2m + 3 \end{cases}$	
		Lại do đường thẳng (d) cắt đường thẳng (d') : $y = 2x - 2m - 1$ tại điểm A($2m+2$; $2m+3$) nằm trong góc phần tư thứ II.	

	$\Rightarrow \begin{cases} 2m+2 < 0 \\ 2m+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases}$	0,25
	Vậy $-\frac{3}{2} < m < -1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài	0,25
	Gọi số khẩu trang mỗi ngày người đó may được theo dự định là x (chiếc). ĐK: $x \in \mathbb{N}^*$	0,25
	Số khẩu trang mỗi ngày thực tế người đó may được là $x + 30$ (chiếc) Theo dự định thời gian người đó may được 1000 chiếc khẩu trang là $\frac{1000}{x}$ (ngày) Thực tế thời gian người đó may được $1000+170 = 1170$ chiếc khẩu trang là $\frac{1170}{x+30}$ (ngày)	
3	a) Do thực tế hoàn thành công việc sớm hơn dự định 1 ngày nên ta có phương trình: $\frac{1000}{x} - \frac{1170}{x+30} = 1$	0,25
	$\Rightarrow 1000x + 30000 - 1170x = x^2 + 30x \Leftrightarrow x^2 + 200x - 30000 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \text{ (TM)} \\ x = -300 \text{ (KTM)} \end{cases}$ Vậy số khẩu trang mỗi ngày người đó may được theo dự định là 100 (Chiếc)	0,25
	$x^2 + 6x + 6m - m^2 = 0$ Có $\Delta' = 9 - 6m + m^2 = (m-3)^2 \geq 0$, với mọi m \Rightarrow phương trình luôn có hai nghiệm x_1, x_2 với mọi m. Theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -6 \\ x_1 \cdot x_2 = 6m - m^2 \end{cases}$	0,25
	b) Theo bài ra ta có: $x_1^3 - x_2^3 + 2x_1^2 + 12x_1 + 72 = 0$ $x_1^3 - x_2^3 + 2x_1^2 + 12x_1 + 72 = 0$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 2x_1(-6 - x_1) + 72 = 0$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] - 2x_1x_2 + 72 = 0$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(36 - 6m + m^2) - 2(6m - m^2) + 72 = 0$ $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(36 - 6m + m^2) + 2(m^2 - 6m + 36) = 0$ $\Leftrightarrow (m^2 - 6m + 36)(x_1 - x_2 + 2) = 0$	

	<p> $\forall m \quad m^2 - 6m + 36 = (m - 3)^2 + 27 > 0, \forall m$ $\Rightarrow x_1 - x_2 + 2 = 0$ </p>	0,25
	<p> Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -6 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$ Giải hệ phương trình ta được $x_1 = -4; x_2 = -2$ $\Rightarrow (-4) \cdot (-2) = 6m - m^2$ $\Leftrightarrow m^2 - 6m + 8 = 0$ </p>	0,25
	<p> Giải phương trình ta được $m = 2$ hoặc $m = 4$ Vậy $m = 2$ hoặc $m = 4$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thỏa mãn $x_1^3 - x_2^3 + 2x_1^2 + 12x_1 + 72 = 0$ </p>	0,25
4	<p>a)</p>	0,25
	<p>Chứng minh tứ giác ACDF nội tiếp Ta có $\widehat{ADC} = 90^\circ$ (AD là đường cao của tam giác ABC) $\widehat{AFC} = 90^\circ$ (CF là đường cao của tam giác ABC)</p>	0,25

	Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{AFC} (= 90^\circ)$. Xét tứ giác ACDF có 2 đỉnh D, F kề nhau cùng nhìn cạnh AC dưới 1 góc không đổi.	0,25
	Do đó tứ giác ACDF nội tiếp	0,25
	Chứng minh $MC^2 = MI \cdot MA$ và tam giác CMD cân. Xét $\triangle MIC$ và $\triangle MCA$ có: \widehat{IMC} chung $\widehat{MCI} = \widehat{MAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung IC) $\Rightarrow \triangle MIC \sim \triangle MCA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MI}{MC} = \frac{MC}{MA}$ (các cạnh tương ứng tỉ lệ) $\Rightarrow MC^2 = MI \cdot MA$.	0,25 0,25
b)	Ta có $\widehat{CAB} = \widehat{MCB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BC) Ta lại có $\widehat{CAB} = \widehat{CDM}$ (Do tứ giác ACDF nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{MCD} = \widehat{CDM} \Rightarrow$ Tam giác CMD cân tại M	0,25 0,25
	Chứng minh ba điểm K, N, C thẳng hàng. Chứng minh được tứ giác CIND nội tiếp vì $\widehat{NIC} + \widehat{NDC} = \widehat{NIC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$ $\Rightarrow \widehat{NCI} = \widehat{NDI}$	0,25
c)	Chứng minh được $\triangle MDI \sim \triangle MAD$ (c.g.c) \widehat{IMD} chung $MD^2 = MC^2 = MI \cdot MA$ (tam giác CMD cân tại M) $\Rightarrow \widehat{MDI} = \widehat{DAM}$ hay $\widehat{KAI} = \widehat{NDI}$	0,25
	$\widehat{KAI} = \widehat{KCI}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung KI) $\Rightarrow \widehat{KCI} = \widehat{NDI}$ Mà $\widehat{NCI} = \widehat{NDI}$ $\Rightarrow \widehat{KCI} = \widehat{NCI}$ \Rightarrow Hai tia KC và NC trùng nhau \Rightarrow Ba điểm K, N, C thẳng hàng.	0,25 0,25
5	Ta có: $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2), \forall a; b \in \mathbb{R}$ Thật vậy $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ $\Leftrightarrow (a-b)(a^3 - b^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$ (luôn đúng $\forall a; b \in \mathbb{R}$) Do đó $a^4 + b^4 + c \geq ab(a^2 + b^2) + c \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c \geq ab(a^2 + b^2) + abc^2 > 0$ (vì $a; b; c > 0$ và $abc = 1$).	0,25

	$\Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c}{ab(a^2 + b^2) + abc^2} \quad (\text{vì } c > 0)$ $\Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c}{ab(a^2 + b^2 + c^2)}$ $\Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c^2}{abc(a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (1).$ <p>Tương tự $\frac{b}{b^4 + c^4 + a} \leq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (2).$</p> <p>và $\frac{a}{b^4 + c^4 + a} \leq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (3)$</p> <p>Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3), ta có:</p> $\frac{a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{b}{a^4 + c^4 + b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ $\Rightarrow T \leq 1, \forall a; b; c > 0 \text{ thỏa mãn } abc = 1.$ <p>Với $a = b = c = 1$ thì $T = 1$. Vậy $\max T = 1$.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
--	--	-------------------------------------

----- Hết -----

