GIẢI TOÁN 12 BÀI 5: KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Trả lời câu hỏi SGK Bài 5: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 5 trang 32:

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số đã học theo sơ đồ trên.

$y = ax + b$

$y = ax^2 + bx + c$

Lời giải:

*** Hàm số $y = ax + b$**

Trường hợp $a > 0$

1. TXĐ: D = R.

2. Sự biến thiên.

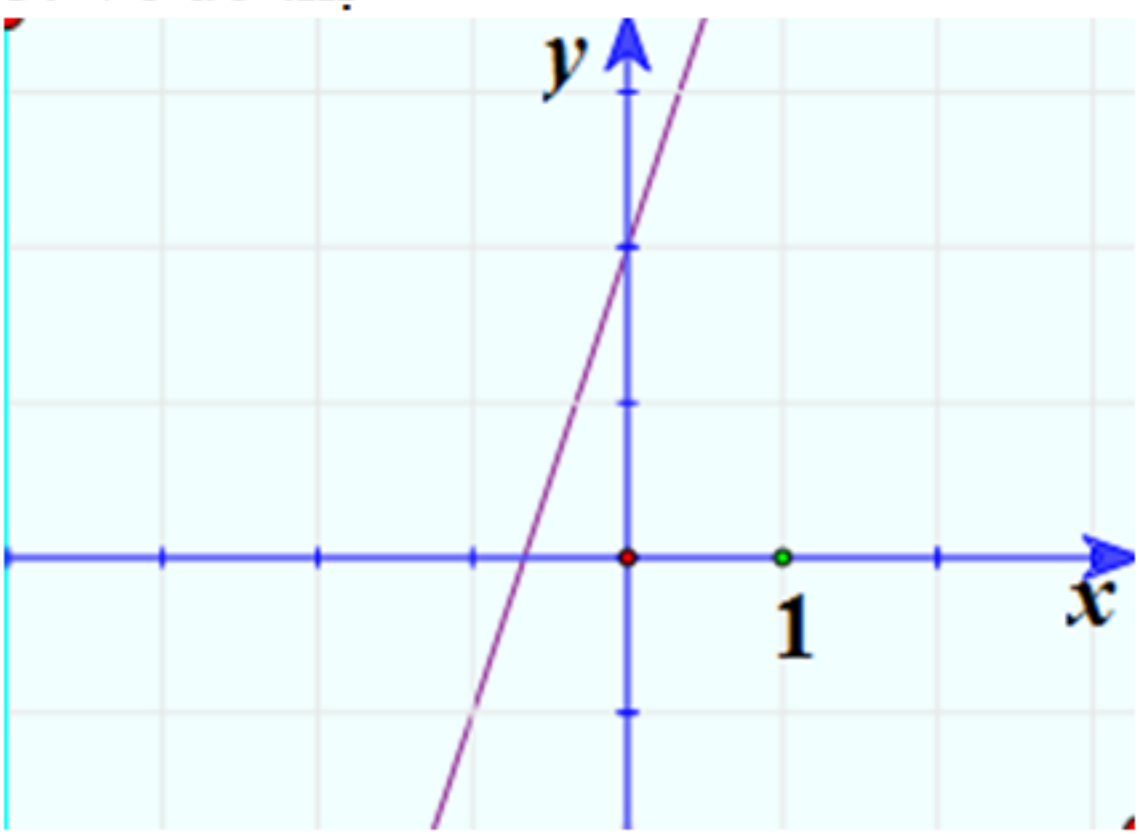
$y' = a > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên toàn bộ R.

$$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty, \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Vẽ đồ thị



Trường hợp a < 0

1. TXĐ: D = R.

2. Sự biến thiên.

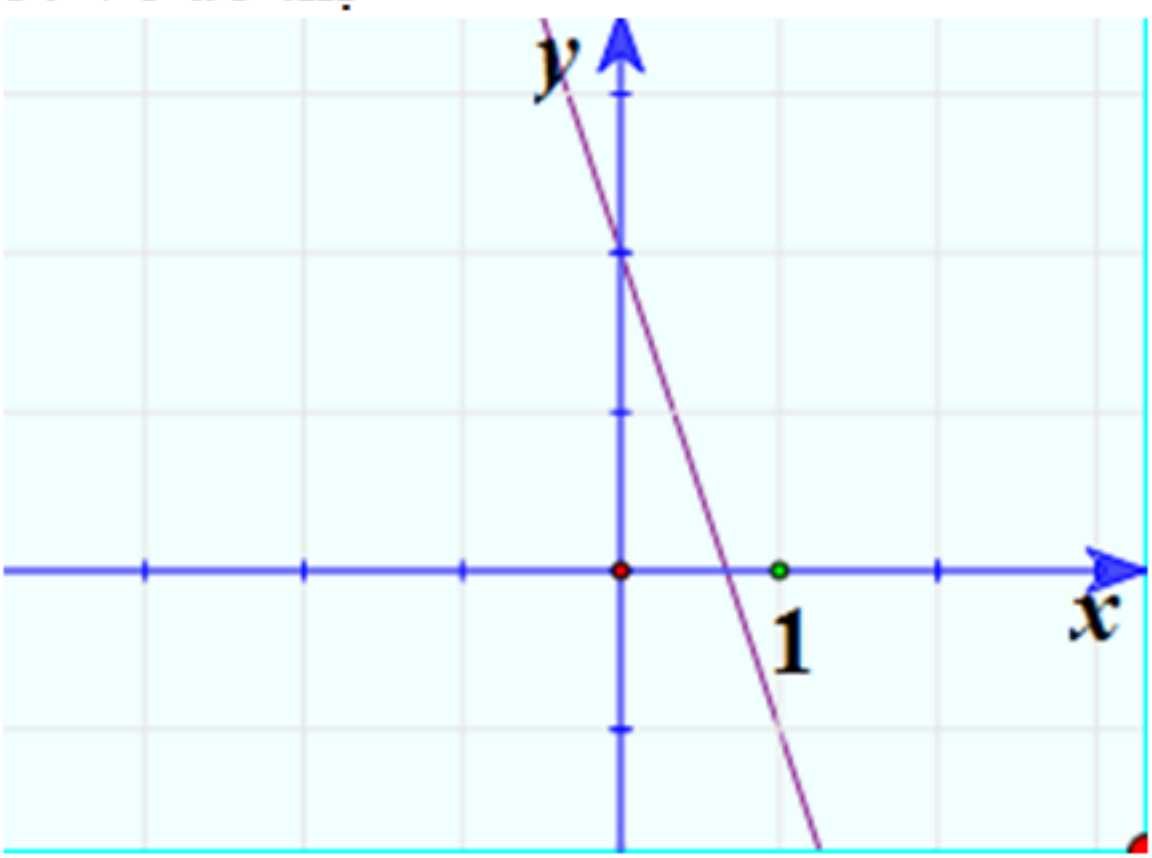
y’ = a < 0. Vậy hàm số đồng biến trên toàn bộ R.

$$\lim_{x\to+\infty} y = -\infty, \lim_{x\to-\infty} y = +\infty$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y’		-	
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

3. Vẽ đồ thị



*** Hàm số y = ax^2 + bx + c**

Trường hợp a > 0

1. TXĐ: D = R.

2. Sự biến thiên.

y’ = 2ax + b. Cho y’ = 0 thì x = - b/2a.

$$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty, \lim_{x\to-\infty} y = +\infty$$

Bảng biến thiên:

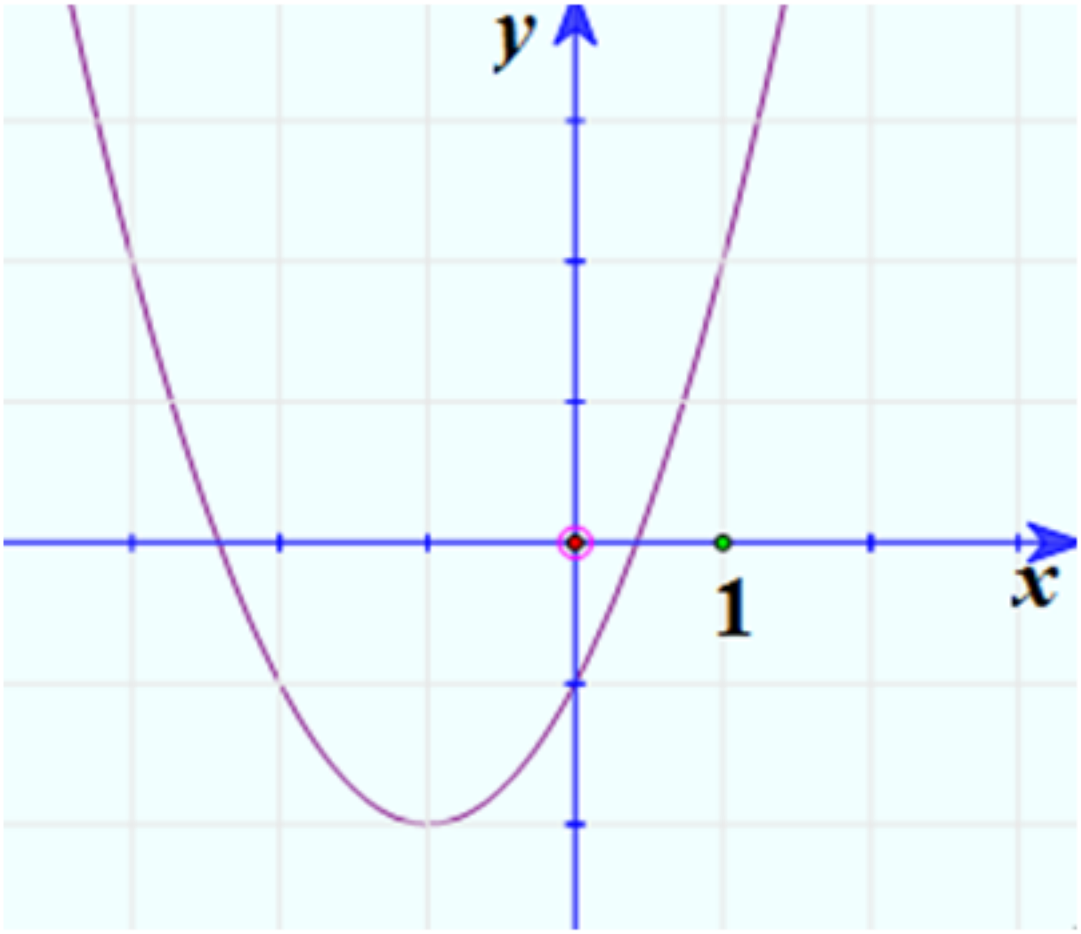
X	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
y’		-	0	+	
Y	0	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	0

Hàm số nghịch biến trên khoảng (-∞,- b/2a).

Hàm số đồng biến trên khoảng [- b/2a, +∞].

Hàm số đạt cực tiểu bằng - Δ/4a tại x = - b/2a .

3. Vẽ đồ thị:



Trường hợp a < 0

1. TXĐ: D = R.

2. Sự biến thiên.

y’ = 2ax + b. Cho y’ = 0 thì x = - b/2a.

$$\lim_{x\to+\infty} y = -\infty, \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$$

Bảng biến thiên:

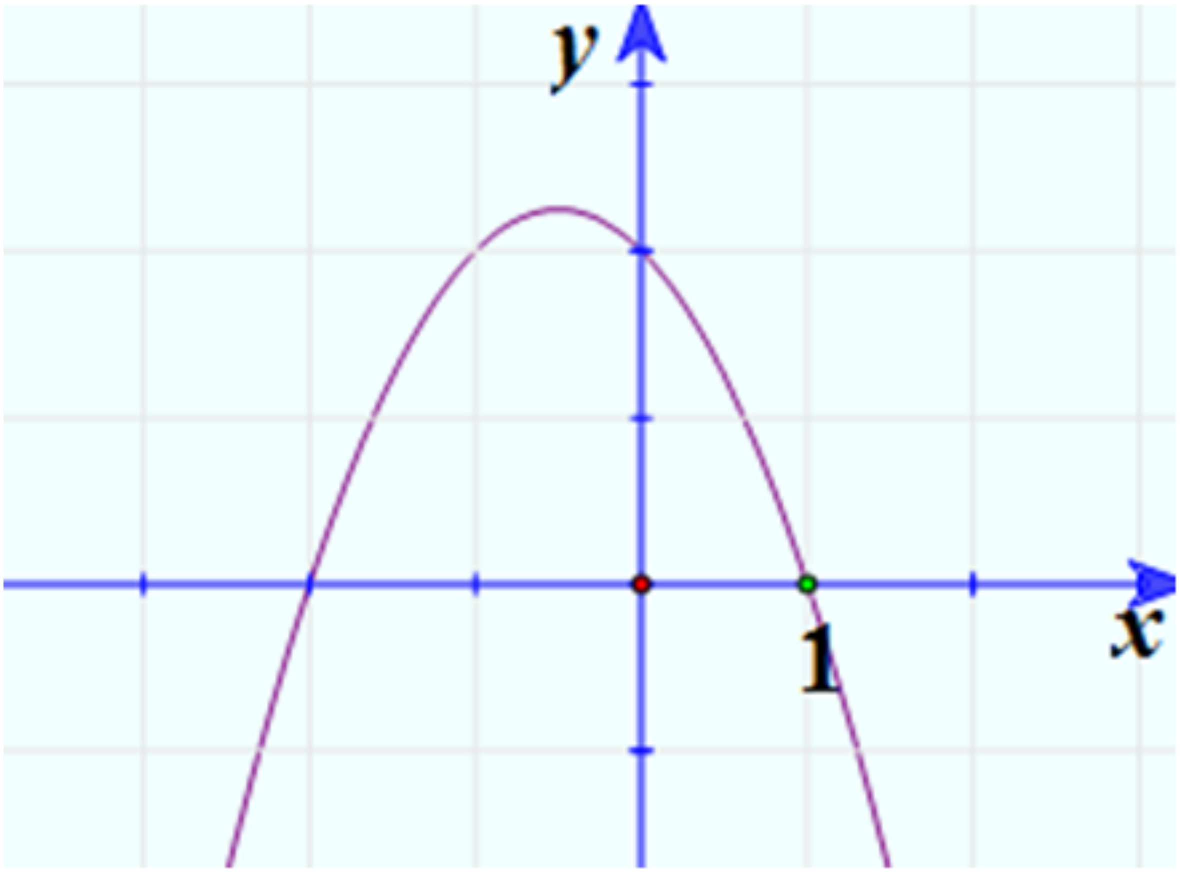
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y’		+	0	-	
y	0	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	0

Hàm số đồng biến trên khoảng (-∞,- b/2a).

Hàm số nghịch biến trên khoảng [- b/2a, +∞].

Hàm số đạt cực đại bằng - Δ/4a tại x = - b/2a .

3. Vẽ đồ thị:



Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 5 trang 33:

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Nêu nhận xét về đồ thị của hàm số này với đồ thị của hàm số khảo sát trong Ví dụ 1.

Lời giải:

1.TXĐ: D = R.

2. Sự biến thiên:

$$\lim_{x \to +\infty} y = -\infty, \lim_{x \to -\infty} y = +\infty$$

$y' = -3x^2 + 6x$. Cho $y' = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$-\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$+\infty$

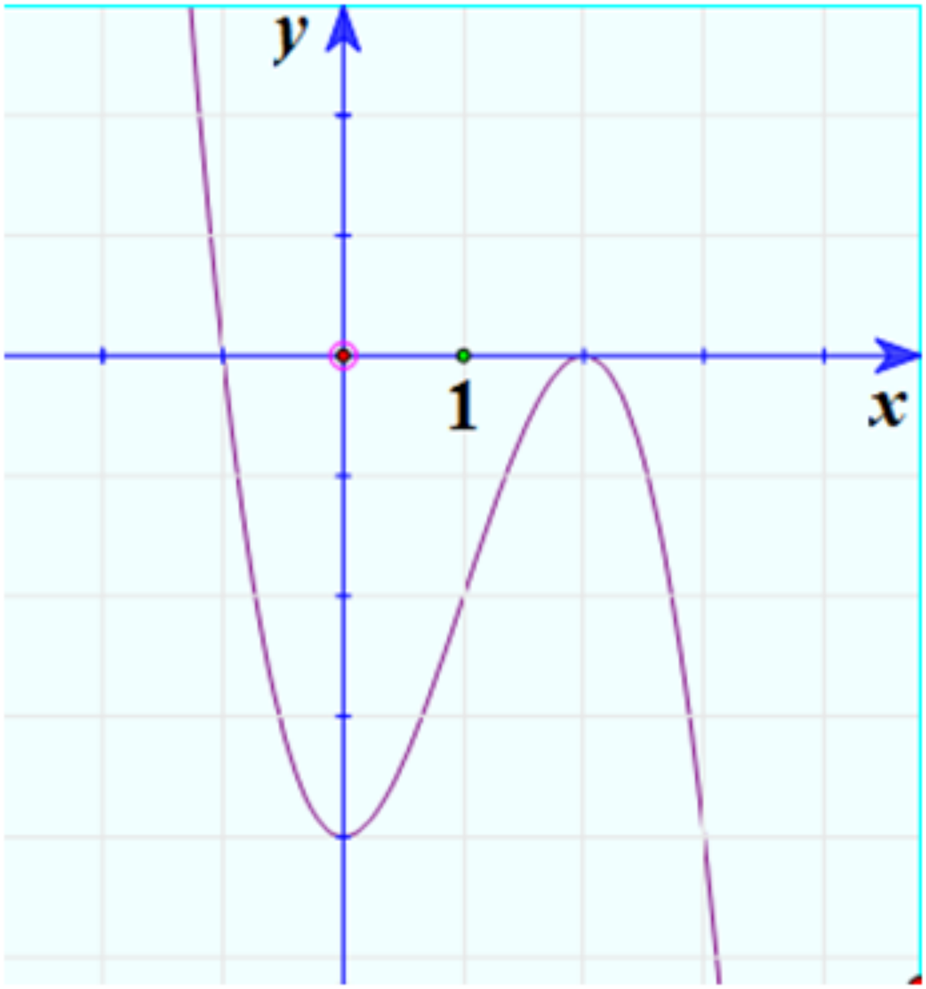
Hàm số đồng biến trên khoảng (0,2)

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty,0)$, $(2,+\infty)$.

Hàm số đạt cực đại bằng 0 tại $x = 2$.

Hàm số đạt cực tiểu bằng -4 tại $x = 0$.

3. Đồ thị



Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 5 trang 35:

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3/3 - x^2 + x + 1$.

Lời giải:

1.TXĐ: D = R.

2. Sự biến thiên:

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty, \lim_{x \to -\infty} y = -\infty$$

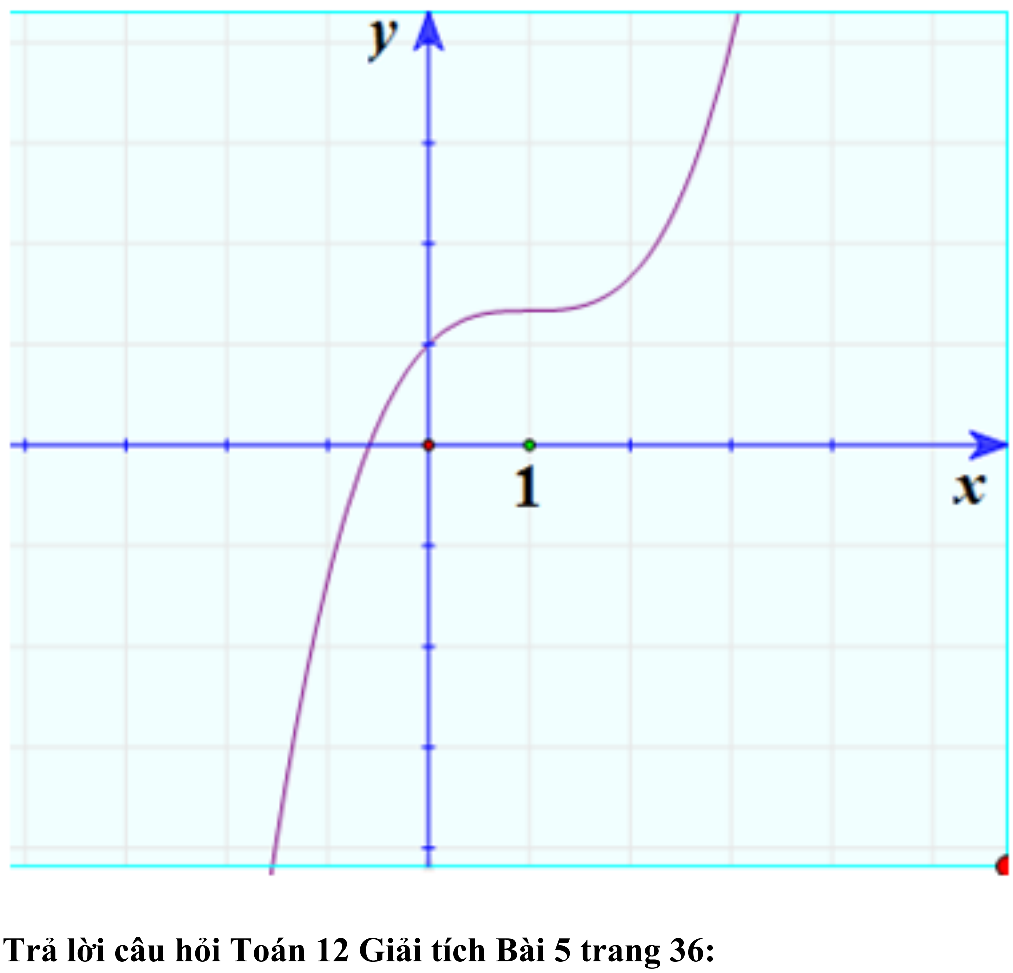
$y' = x^2 – 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ với mọi x. Vậy hàm số đồng biến trên toàn bộ R.

Cho $y' = 0 \Rightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

X		1		$+\infty$
y’	+	0	+	
Y	$-\infty$ ↗	$\frac{4}{3}$	↗	$+\infty$

3. Đồ thị



Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 5 trang 36:

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Bằng đồ thị, biện luận theo m số nghiệm của phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 = m$.

Lời giải:

1.TXĐ: D = R.

2. Sự biến thiên:

$$\lim_{x \to +\infty} y = -\infty, \lim_{x \to -\infty} y = -\infty$$

$y' = -4x^3 + 4x$. Cho $y' = 0 \Rightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$-\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	4	↘	$-\infty$

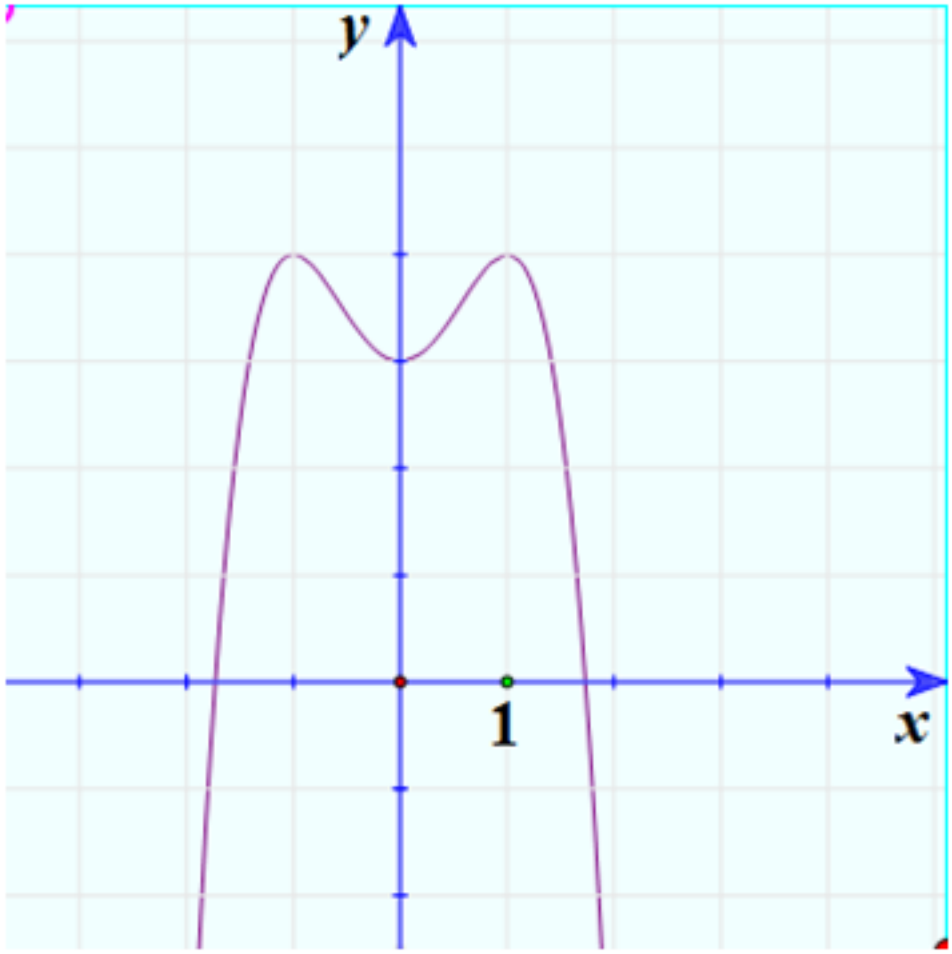
Hàm số đồng biến trên: $(-\infty,-1)$, $(0,1)$.

Hàm số nghịch biến trên: $(-1,0)$, $(1, +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại bằng 4 tại $x = -1$ và $x = 1$.

Hàm số đạt cực tiểu bằng 3 tại $x = 0$.

3. Đồ thị



Giải biện luận phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 = m$.

Số giao điểm của hai đồ thị $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ và $y = m$ là số nghiệm của phương trình trên.

Với $m > 4$. Hai đồ thị không giao nhau nên phương trình vô nghiệm.

Với $m = 4$ và $m < 3$. Hai đồ thị giao nhau tại 2 điểm phân biệt nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Với $m = 3$. Hai đồ thị giao nhau tại 3 điểm phân biệt nên phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Với $3 < m < 4$. Hai đồ thị giao nhau tại 4 điểm phân biệt nên phương trình có bốn nghiệm phân biệt.

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 5 trang 38:

Lấy một ví dụ về hàm số dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ sao cho phương trình y' = 0 chỉ có một nghiệm.

Lời giải:

Ví dụ hàm số $y = x^4$. Có đạo hàm $y' = 4x^3$. Cho y' = 0 thì x = 0.

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 5 trang 42:

Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hai hàm số

$y = x^2 + 2x – 3$

$y = -x^2 – x + 2$.

Lời giải:

Xét phương trình tương giao:

$-x^2 – x + 2 = x^2 + 2x – 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x – 5 = 0$

$\Leftrightarrow$ x = 1 hoặc x = -5/2.

Vậy tọa độ giao điểm là (1, 0) và (-5/2, 8.25).

Giải bài tập SGK Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

Bài 1 (trang 43 SGK Giải tích 12):

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc ba sau:

a) $y = 2 + 3x - x^3$;

b) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$;

d) $y = -2x^3 + 5$

Lời giải:

a) Hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$.

1) Tập xác định: D = R

2) Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

y' = $-3x^2 + 3$.

y' = 0 ⇔ x = ±1.

Trên các khoảng (-∞; -1) và (1; +∞), y' < 0 nên hàm số nghịch biến.

Trên (-1 ; 1), y' > 0 nên hàm số đồng biến.

+ Cực trị :

Hàm số đạt cực đại tại x = 1, $y_{CĐ} = 4$;

Hàm số đạt cực tiểu tại x = -1 ; $y_{CT} = 0$.

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(2+3x-x^3\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^3.\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}-1\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(2+3x-x^3\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}-1\right) = -\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$+\infty$

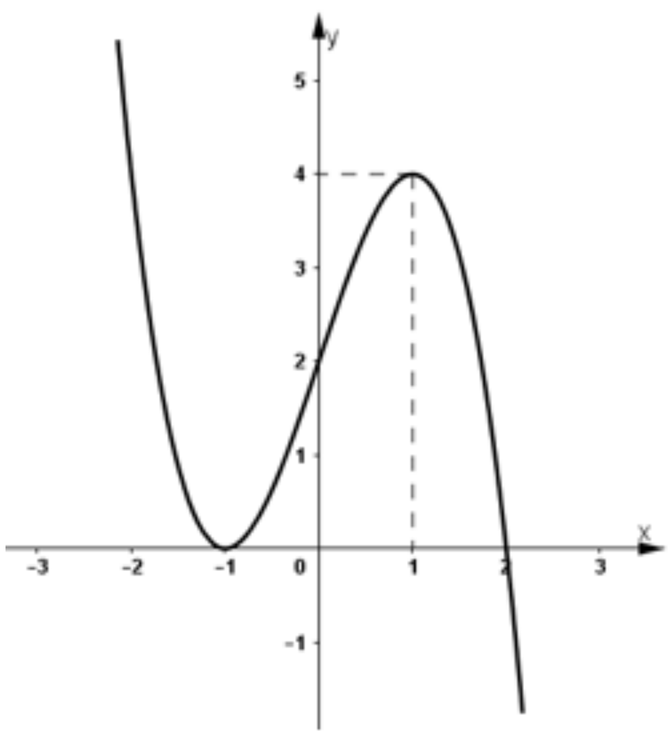
3) Đồ thị:

Ta có : $2 + 3x - x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Vậy giao điểm của đồ thị với trục Ox là (2; 0) và (-1; 0).

$y(0) = 2 \Rightarrow$ giao điểm của đồ thị với trục Oy là (0; 2).

Đồ thị hàm số :



b) Hàm số $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

1) Tập xác định: D = R

2) Sự biến thiên:

y' = -3x^2 + 8x - 4;

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Trên các khoảng (-∞; 2/3) và (2; +∞) thì y' < 0 nên hàm số nghịch biến.

Trên (2/3; 2) thì y' > 0 nên hàm số đồng biến.

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại x = 2, f_{CD} = 0;

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 2/3; f_{CT} = -32/27

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(-x^3+4x^2-4x\right) = \lim_{x\to+\infty} - x^3\left(-1+\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+4x^2-4x\right) = \lim_{x\to-\infty} - x^3\left(-1+\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = +\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{32}{27}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

3) Đồ thị:

Ta có : $-x^3 + 4x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow -x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

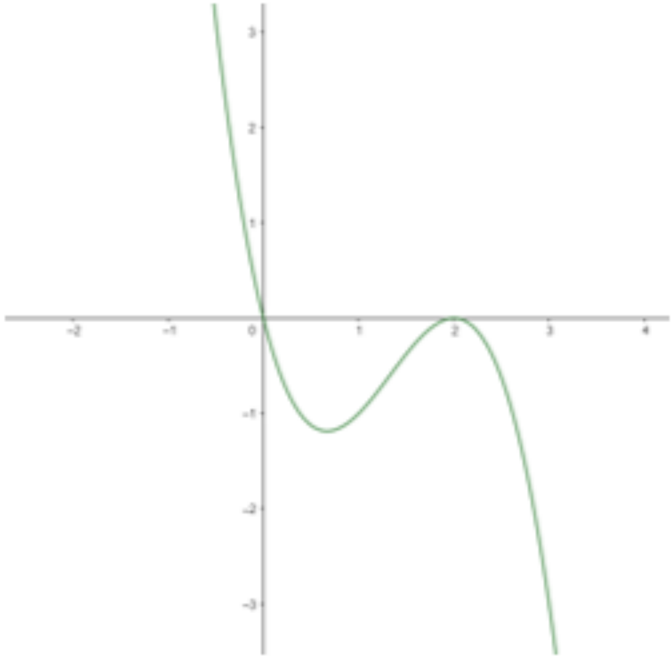
Vậy giao điểm của đồ thị với Ox là (0;0) và (2;0).

+ y(1) = -1. Vậy (1; -1) thuộc đồ thị hàm số.

+ y(3) = -3. Vậy (3;-3) thuộc đồ thị hàm số

y(-1) = -1 $\Rightarrow$ (-1; -1) thuộc đồ thị hàm số

Đồ thị hàm số :



c) Hàm số y = $x^3 + x^2 + 9x$.

1) Tập xác định: D = R

2) Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

y' = $3x^2 + 2x + 9 > 0$

Vì $3x^2 + 2x + 9$

$$= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + 9$$

$$= 3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 3.\frac{1}{9} + 9$$

$$= 3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{26}{3} > 0\ \forall x$$

⇒ Hàm số luôn đồng biến trên R.

+ Hàm số không có cực trị.

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3.\left(1+\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3.\left(1+\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = +\infty$$

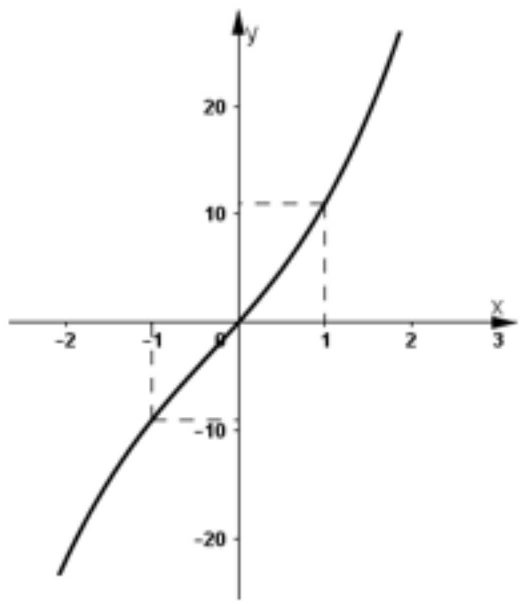
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Đồ thị hàm số.

+ Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại (0 ; 0).

+ Đồ thị hàm số đi qua (1; 11) ; (-1; -9)



d) Hàm số $y = 2x^3 + 5$.

1) Tập xác định: D = R

2) Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = 6x^2 \geq 0\ \forall x \in R$

Hàm số đồng biến trên R

Hàm số không có cực trị.

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 + 5 = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(2 + \frac{5}{x^3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 + 5 = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(2 + \frac{5}{x^3}\right) = -\infty$$

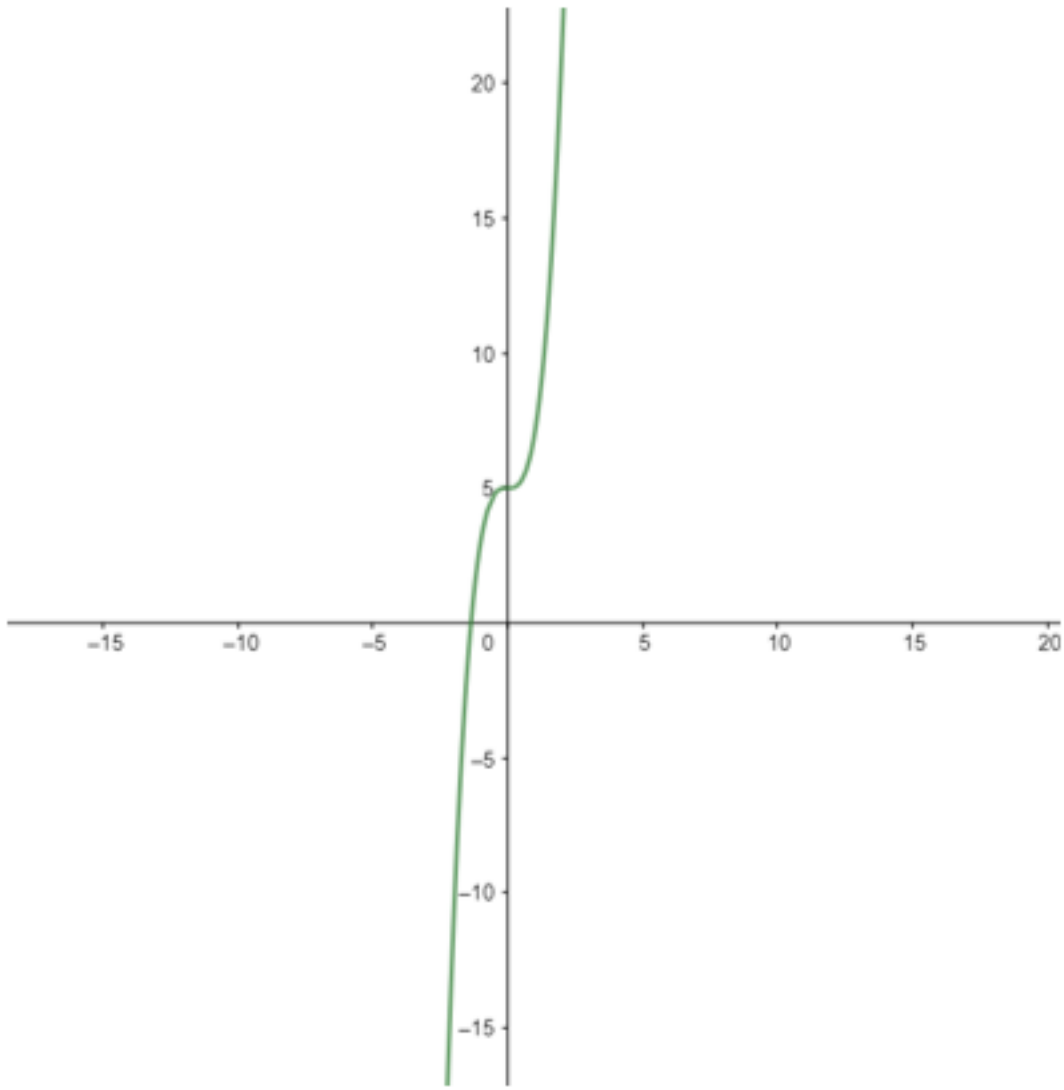
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y			$+\infty$
	$-\infty$		

3) Đồ thị:

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại (0;5)

Đồ thị hàm số đi qua điểm (1;7) và (-1;3)



Bài 2 (trang 43 SGK Giải tích 12):

Khảo sát tự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc bốn sau:

a) $y = -x^4 + 8x^2 - 1$;

b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$;

c) $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$;

d) $y = -2x^2 - x^4 + 3$.

Lời giải:

a) Hàm số $y = -x^4 + 8x^2 - 1$.

1) Tập xác định: D = R

2) Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = -4x^3 + 16x = -4x(x^2 - 4)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x = \pm 2$

Trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$, y' > 0 nên hàm số đồng biến.

Trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$, y' < 0 nên hàm số nghịch biến.

+ Cực trị :

Hàm số đạt cực đại tại x = 2 và x = -2 ; yCĐ = 15

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 0 ; yCT = -1.

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(-1 + \frac{8}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) = -\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$-\infty$	↗	15	↘	-1	↗	15	↘	$-\infty$

3) Đồ thị:

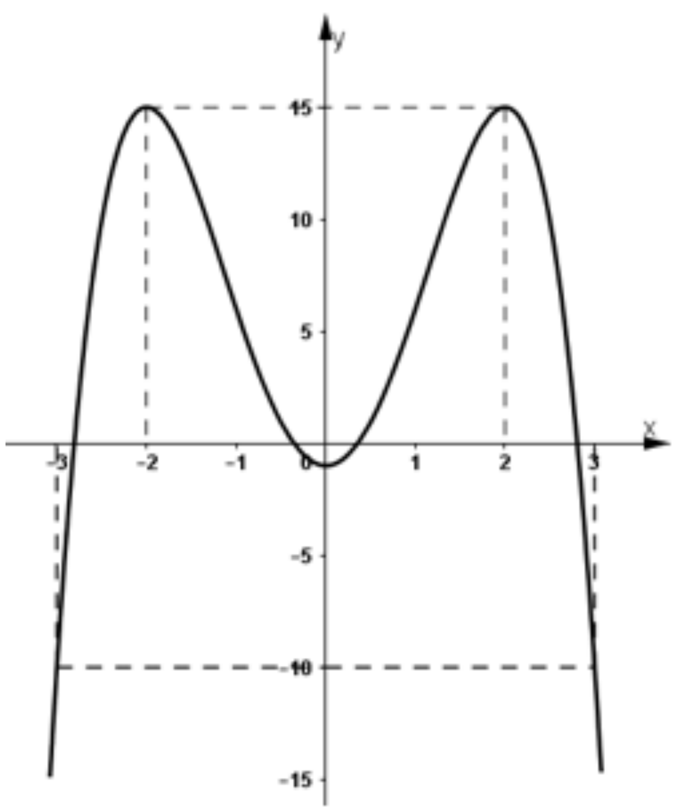
+ Hàm số đã cho là hàm số chẵn, vì:

$y(-x) = -(-x)^4 + 8(-x)^2 - 1 = -x^4 + 8x^2 - 1 = y(x)$

⇒ Đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

+ Giao với Oy tại điểm (0; -1) (vì y(0) = -1).

+ Đồ thị hàm số đi qua (-3; -10) và (3; 10).



b) Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

1) Tập xác định: D = R

2) Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 ; x = \pm 1.$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} x^4\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4}\right) = +\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Kết luận :

Hàm số đồng biến trên khoảng (-1; 0) và (1; $+\infty$).

Hàm số nghịch biến trên các khoảng ($-\infty$; -1) và (0; 1).

Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là: (-1; 1) và (1; 1).

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là: (0; 2)

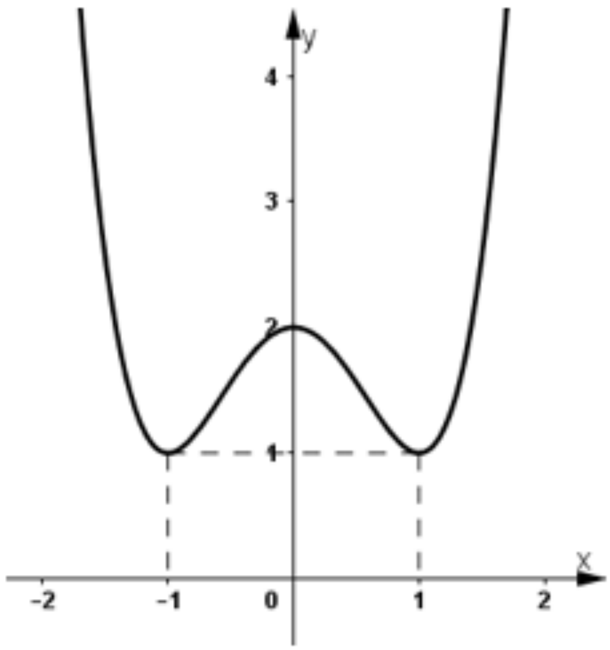
3) Đồ thị:

+ Hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy là trục đối xứng.

+ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại (0; 2).

+ Đồ thị hàm số đi qua (-1; 1) và (1; 1).

+ Đồ thị hàm số:



c) Hàm số

1) Tập xác định: D = R

2) Sự biến thiên:

+ $y' = 2x^3 + 2x = 2x(x^2 + 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^4}\right) = +\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$\frac{-3}{2}$	↗	$+\infty$

Kết luận: Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$.

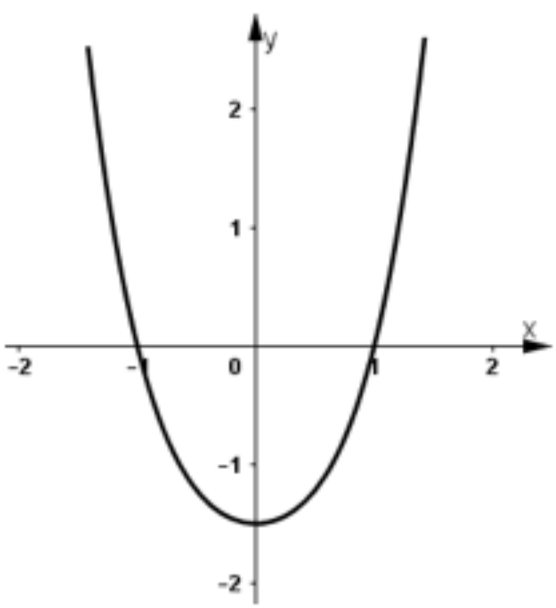
Đồ thị hàm số có điểm cực đại là: (0; -3/2).

3) Đồ thị:

+ Hàm số chẵn nên nhận trục Oy là trục đối xứng.

+ Hàm số cắt trục hoành tại điểm (-1; 0) và (1; 0).

+ Hàm số cắt trục tung tại điểm (0;-3/2)



d) Hàm số $y = -2x^2 - x^4 + 3$.

1) Tập xác định: D = R

2) Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = -4x - 4x^3 = -4x(1 + x^2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -4x(1 + x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(\frac{-2}{x^2} - 1 + \frac{3}{x^4}\right) = -\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+	0	-	
y			3		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Kết luận: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0; +\infty)$.

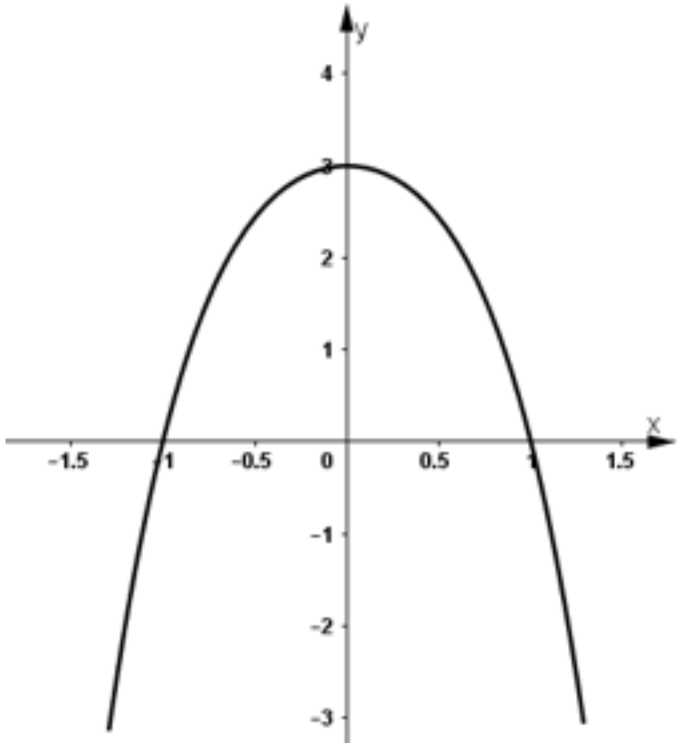
Đồ thị hàm số có điểm cực đại là: (0; 3).

3) Đồ thị:

+ Hàm số là hàm số chẵn nên nhận trục Oy là trục đối xứng.

+ Hàm số cắt trục Ox tại (-1; 0) và (1; 0).

+ Hàm số cắt trục Oy tại (0; 3).



Bài 3 (trang 43 SGK Giải tích 12): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số phân thức:

a) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$;

b) $y = \dfrac{1-2x}{2x-4}$;

c) $y = \dfrac{-x+2}{2x+1}$.

Lời giải:

a) Hàm số $y = \dfrac{x+3}{x-1}$

1) Tập xác định: D = R \ {1}

2) Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y = 1 + \frac{4}{x-1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-4}{(x-1)^2} < 0 \ \forall x \in D.$$

⇒ Hàm số nghịch biến trên (-∞; 1) và (1; +∞).

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x \to 1^-} y = -\infty; \ \lim_{x \to 1^+} y = +\infty$$

⇒ x = 1 là tiệm cận đứng.

Lại có:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+3}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1$$

⇒ y = 1 là tiệm cận ngang.

+ Bảng biến thiên:

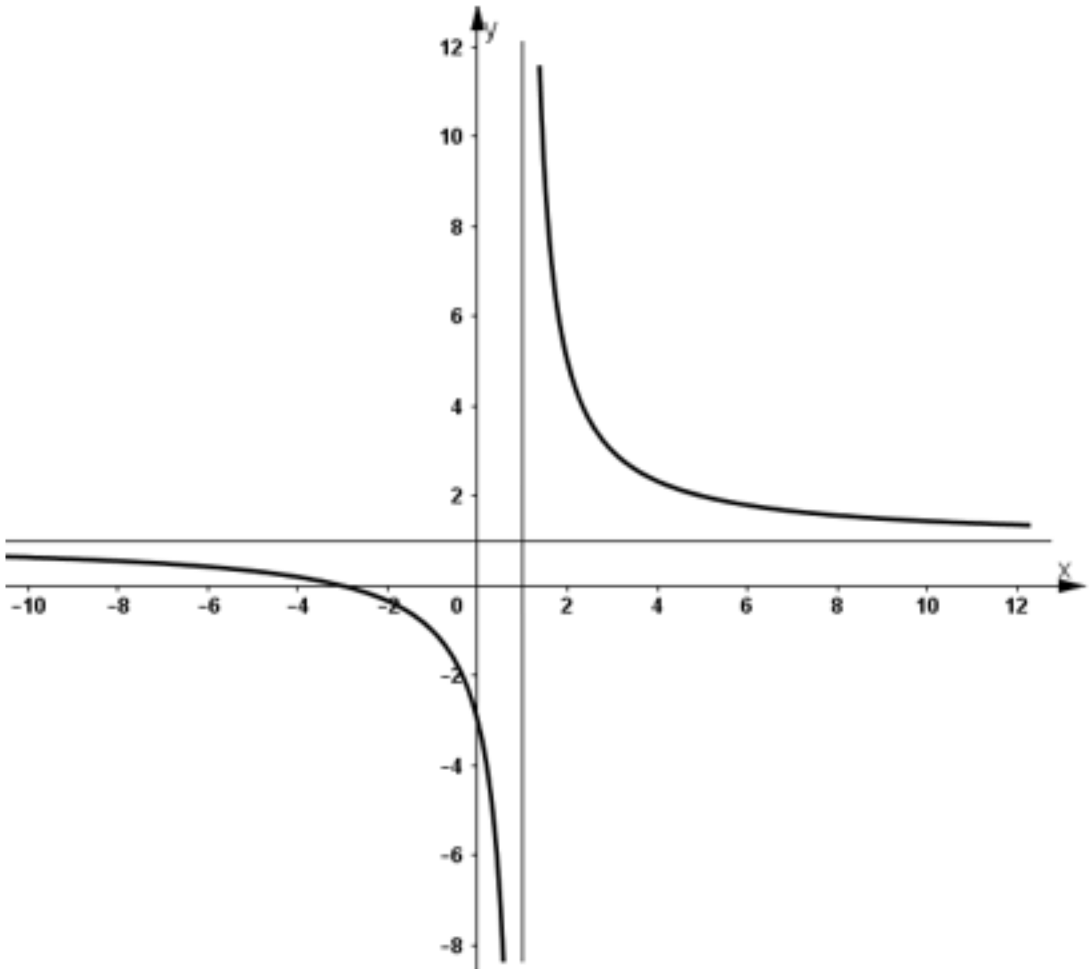
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

3) Đồ thị:

+ Giao với Oy: (0; -3)

+ Giao với Ox: (-3; 0)

+ Đồ thị nhận (1; 1) là tâm đối xứng.



b) Hàm số $y = \dfrac{1-2x}{2x-4}$

1) Tập xác định: D = R \ {2}

2) Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y = -1 - \frac{3}{2x - 4}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{3.2}{(2x-4)^2} = \frac{6}{(2x-4)^2} > 0 \ \forall x \in D$$

⇒ Hàm số đồng biến trên (-∞; 2) và (2; +∞).

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x\to 2^-} y = +\infty; \ \lim_{x\to 2^+} = -\infty$$

⇒ x = 2 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lại có:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x}{2x-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - 2}{2 - \frac{4}{x}} = -1$$

⇒ y = -1 là tiệm cận ngang.

+ Bảng biến thiên:

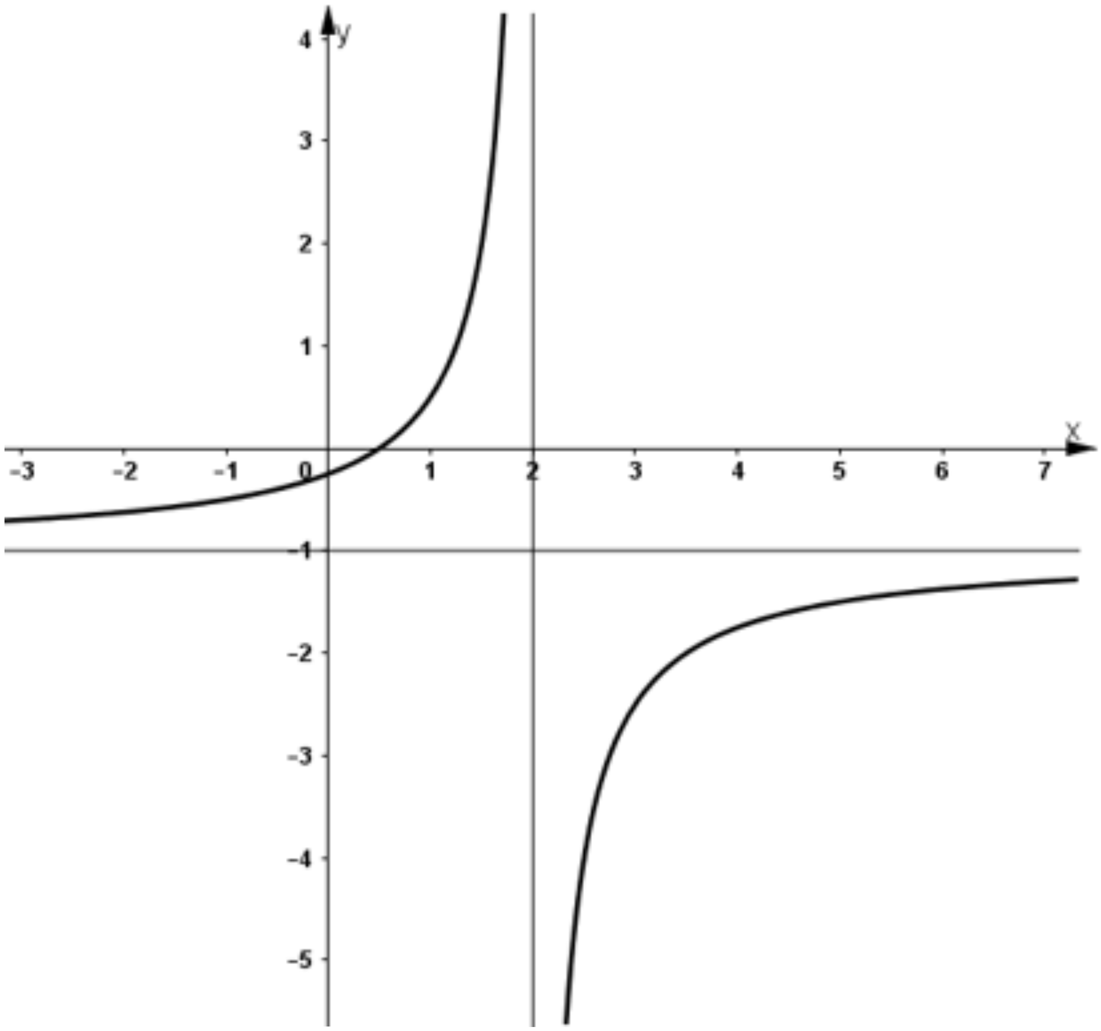
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y’		+	‖	+	
y	-1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ -1

3) Đồ thị:

+ Giao với Oy: (0; -1/4)

+ Giao với Ox: (1/2; 0)

+ Đồ thị hàm số nhận (2; -1) là tâm đối xứng.



c) Hàm số $y = \dfrac{-x+2}{2x+1}$

1) Tập xác định: D = R \ {-1/2}

2) Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = \frac{-1(2x+1) - 2.(-x+2)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{-5}{(2x+1)^2} < 0 \; \forall x \in D$$

⇒ Hàm số nghịch biến trên (-∞; -1/2) và (-1/2; +∞).

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{-x+2}{2x+1} = -\infty; \quad \lim_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{-x+2}{2x+1} = +\infty$$

⇒ $x = \frac{-1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x+2}{2x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1+\frac{2}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{-1}{2}$$

⇒ $y = \frac{-1}{2}$ là tiệm cận ngang.

+ Bảng biến thiên:

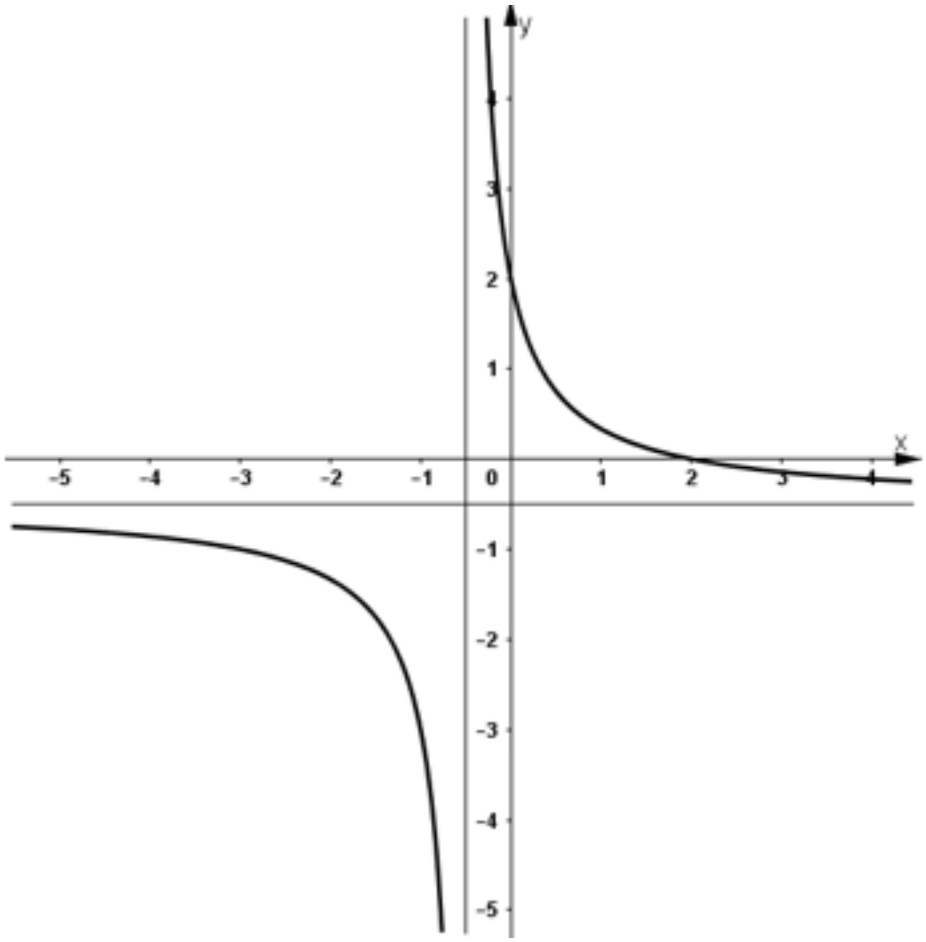
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		-	$\Vert$	-	
y	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

3) Đồ thị:

+ Giao với Oy: (0; 2)

+ Giao với Ox: (2; 0)

+ Đồ thị hàm số nhận $\left(\frac{-1}{2};\frac{-1}{2}\right)$ là tâm đối xứng.



Bài 4 (trang 44 SGK Giải tích 12): Bằng cách khảo sát hàm số, hãy tìm số nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$;

b) $-2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$;

c) $2x^2 - x^4 = -1$

Lời giải:

a) Xét $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ (1)

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 ; x = 2$

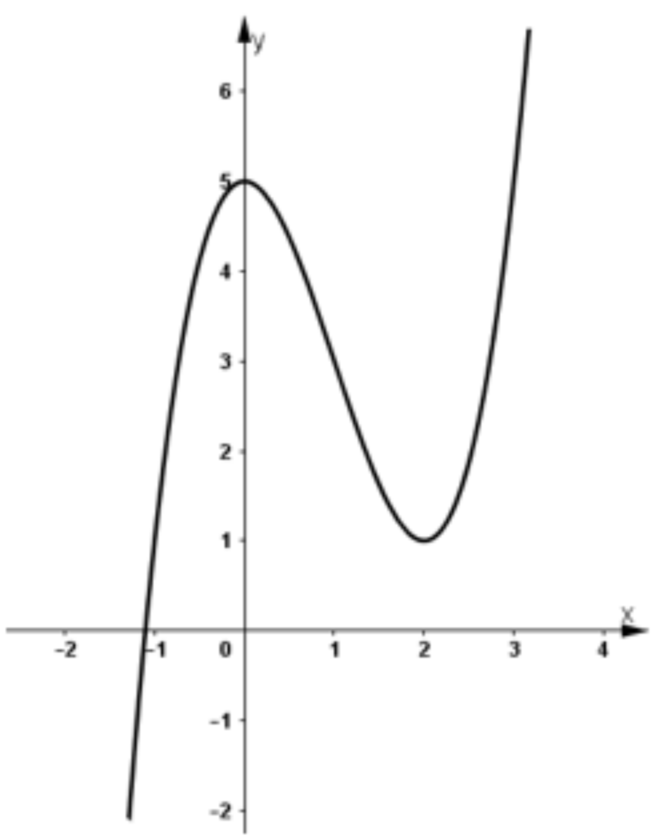
+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \;;\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	
y			5				$+\infty$
	$-\infty$				1		

- Đồ thị:



Đồ thị hàm số y = f(x) cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

⇒ phương trình $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ chỉ có 1 nghiệm duy nhất.

b) Xét hàm số $y = f(x) = -2x^3 + 3x^2 – 2$.

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = -6x^2 + 6x = -6x(x - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 ; x = 1$

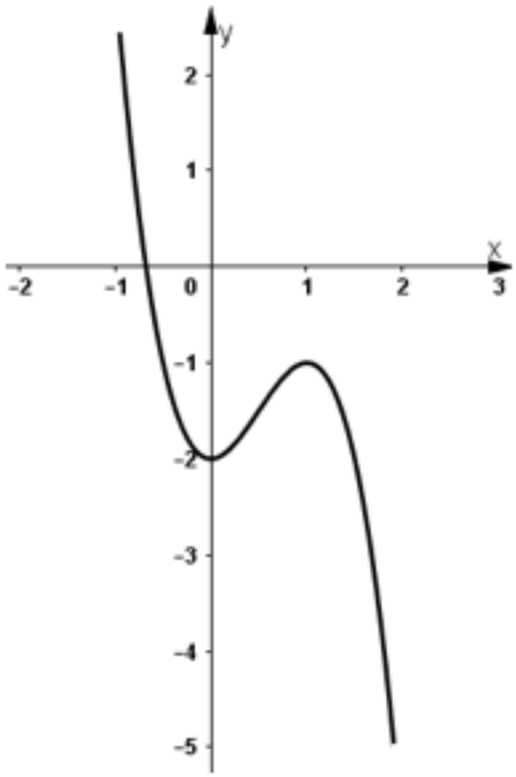
+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \;;\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	$-\infty$

- Đồ thị:



Đồ thị hàm số y = f(x) cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất

⇒ phương trình f(x) = 0 có nghiệm duy nhất.

Vậy phương trình $-2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ chỉ có một nghiệm.

c) Xét hàm số $y = f(x) = 2x^2 - x4$

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 ; x = \pm 1$

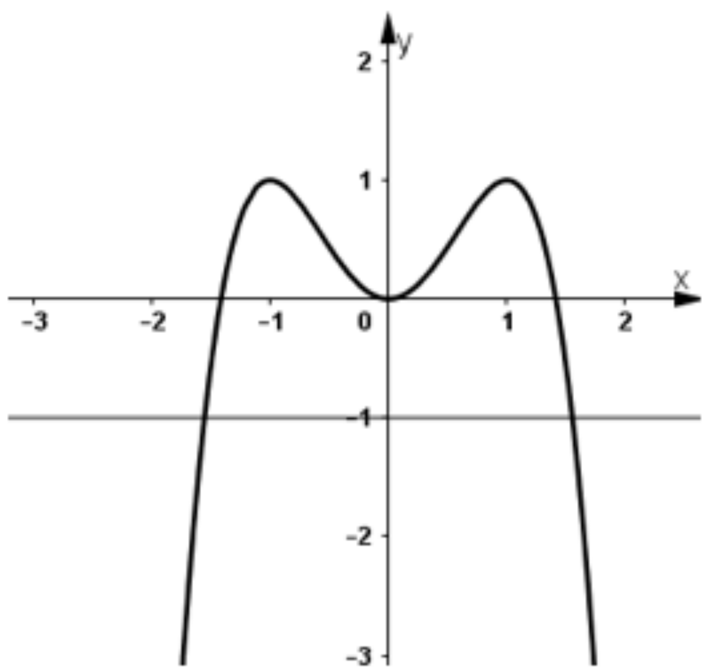
+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	–	0	+	0	–	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$+\infty$

- Đồ thị:



Đồ thị hàm số y = f(x) cắt đường thẳng y = -1 tại hai điểm

⇒ Phương trình f(x) = -2 có hai nghiệm phân biệt.

Bài 5 (trang 44 SGK Giải tích 12): a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

$$y = -x^3 + 3x + 1$$

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận về số nghiệm của phương trình sau theo tham số m:

$$x^3 - 3x + m = 0$$

Lời giải:

a) Khảo sát hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$

- Tập xác định: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = +\infty \;;\; \lim_{x\to+\infty} y = +\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Kết luận: hàm số đồng biến trên khoảng (-1; 1).

hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

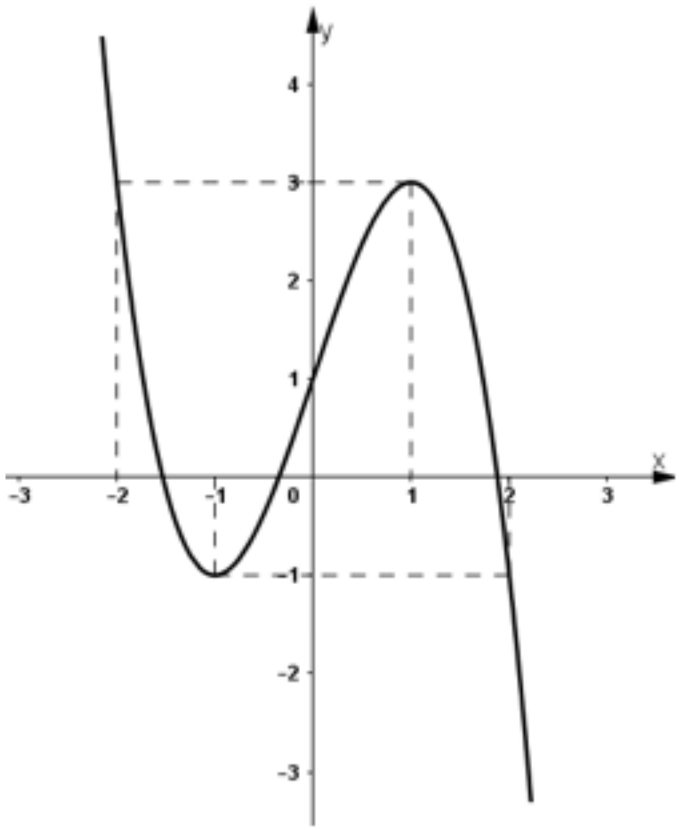
Hàm số đạt cực tiểu tại x = -1 ; $y_{CT} = -1$.

Hàm số đạt cực đại tại x = 1 ; $y_{CĐ} = 3$.

- Đồ thị:

+ Giao với Oy: (0; 1).

+ Đồ thị (C) đi qua điểm (-2; 3), (2;-1).



b) Ta có: x^3 - 3x + m = 0 (*)

⇔ $-x^3 + 3x + 1 = m + 1$

Số nghiệm của phương trình (*) phụ thuộc số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ và đường thẳng y = m + 1.

Kết hợp với quan sát đồ thị hàm số ta có :

+ Nếu m + 1 < –1 ⇔ m < –2

⇒ (C) cắt (d) tại 1 điểm.

⇒ phương trình (*) có 1 nghiệm.

+ Nếu m + 1 = –1 ⇔ m = –2

⇒ (C) cắt (d) tại 2 điểm

⇒ phương trình (*) có 2 nghiệm.

+ Nếu –1 < m + 1 < 3 ⇔ –2 < m < 2

⇒ (C) cắt (d) tại 3 điểm.

⇒ phương trình (*) có 3 nghiệm.

+ Nếu m + 1 = 3 ⇔ m = 2

⇒ (C) cắt (d) tại 2 điểm.

⇒ phương trình (*) có hai nghiệm.

+ Nếu m + 1 > 3 ⇔ m > 2

⇒ (C) cắt (d) tại 1 điểm

⇒ phương trình (*) có một nghiệm.

Kết luận : + Với m < -2 hoặc m > 2 thì phương trình có 1 nghiệm.

+ Với m = -2 hoặc m = 2 thì phương trình có 2 nghiệm.

+ Với -2 < m < 2 thì phương trình có 3 nghiệm.

Bài 6 (trang 44 SGK Giải tích 12): Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 1}{2x + m}$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số luôn đồng biến trên khoảng xác định của nó.

b) Xác định m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua A(-1, √2).

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 2.

Lời giải:

a) Với mọi tham số m ta có :

$$y' = \frac{m(2x+m) - 2.(mx-1)}{(2x+m)^2}$$

$$= \frac{m^2+2}{(2x+m)^2} > 0 \ \forall x \in D.$$

Vậy hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) Ta có:

$$+ \text{Khi } x \to \left(-\frac{m}{2}\right)^+ :$$

$$mx - 1 \to -\frac{m^2}{2} - 1 < 0$$

$$2x + m \to 0^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \left(-\frac{m}{2}\right)^+} \frac{mx-1}{2x+m} = -\infty$$

$\Rightarrow$ $x = \frac{-m}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Tiệm cận đứng đi qua A(-1 ; √2)

$\Leftrightarrow$ $\frac{-m}{2} = -1$

$\Leftrightarrow$ m = 2.

Vậy với m = 2 thì tiệm cận đứng của đồ thị đi qua A(-1, √2)

c) Với m = 2 ta được hàm số: $y = \dfrac{2x - 1}{2x + 2}$

- TXĐ: D = R \ {-1}

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: Theo kết quả câu a)

Hàm số đồng biến trên (-∞ ; -1) và (-1 ; +∞)

+ Cực trị : Hàm số không có cực trị.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x \to (-1)^-} y = -\infty \ ; \ \lim_{x \to (-1)^+} y = +\infty$$

⇒ đồ thị có tiệm cận đứng là x = -1.

Lại có

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - 1}{2x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{2}{x}} = 1$$

⇒ đồ thị có tiệm cận ngang là y = 1.

+ Bảng biến thiên:

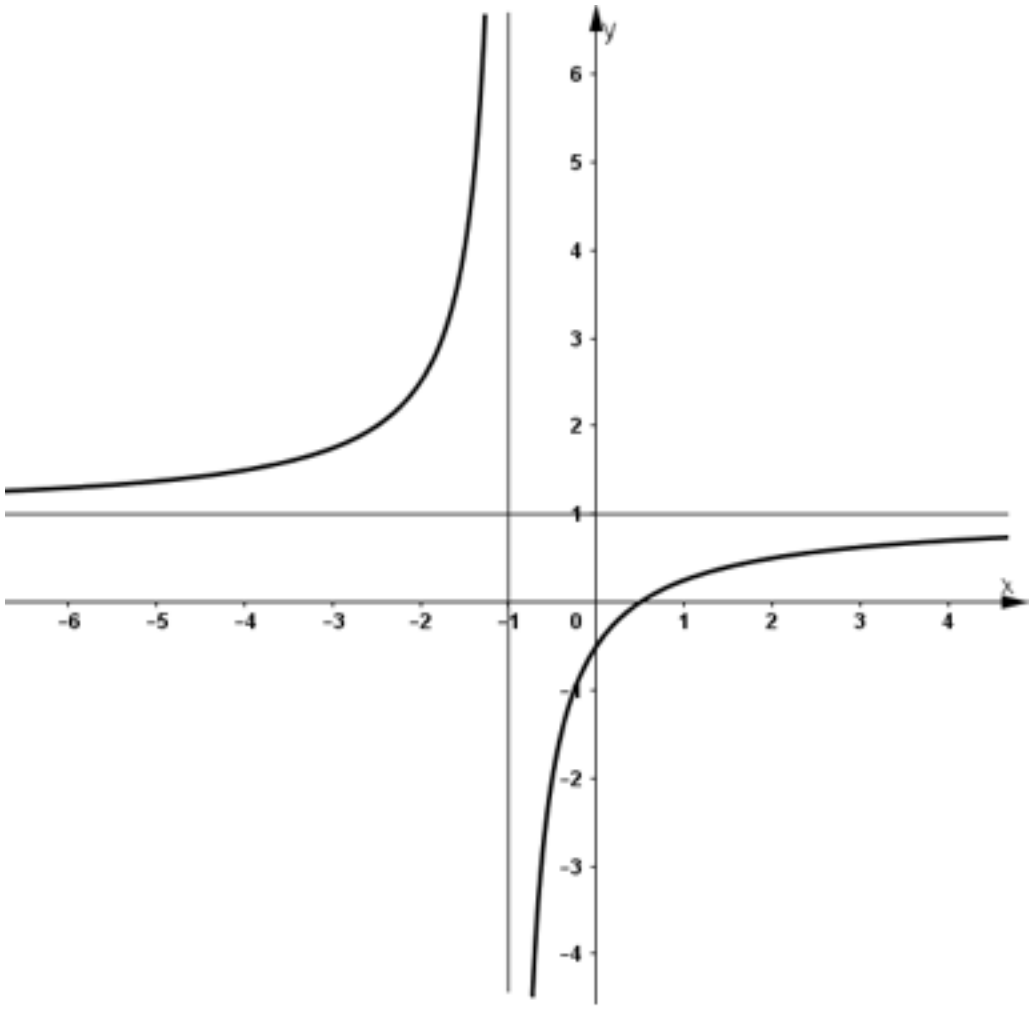
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ 1

- Đồ thị:

+ Đồ thị cắt trục hoành tại (1/2 ; 0).

+ Đồ thị cắt trục tung tại (0 ; -1/2).

+ Đồ thị nhận I(-1 ; 1) là tâm đối xứng.



Bài 7 (trang 44 SGK Giải tích 12): Cho hàm số

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + m$$

a) Với giá trị nào của tham số m, đồ thị của hàm đi qua điểm (-1; 1) ?

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 1.

c) Viết phương trình tiếp tuyến (C) tại điểm có tung độ bằng 7/4.

Lời giải:

a) Đồ thị hàm số qua điểm (-1; 1)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}.(-1)^4 + \frac{1}{2}.(-1)^2 + m = 1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{4}.$$

b) Với m = 1, hàm số trở thành $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1$

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = x^3 + x = x(x^2 + 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) \Leftrightarrow x = 0$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = +\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Kết luận:

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$

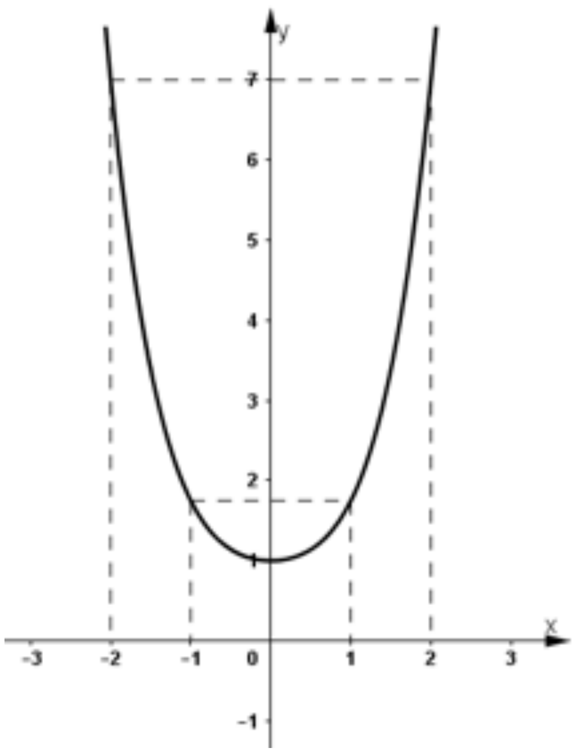
Hàm số có điểm cực tiểu là (0; 1).

- Đồ thị:

+ Đồ thị nhận trục Oy là trục đối xứng.

+ Đồ thị cắt trục tung tại (0; 1).

+ Đồ thị hàm số đi qua (-1; 1,75); (1; 1,75); (-2; 7); (2; 7).



c) Điểm thuộc (C) có tung độ bằng 7/4 nên hoành độ của điểm đó là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

+ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $\left(1; \frac{7}{4}\right)$:

y'(1) = 2

⇒ Phương trình tiếp tuyến: $y = 2.(x - 1) + \frac{7}{4}$ hay $y = 2x - \frac{1}{4}$

+ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $\left(-1; \frac{7}{4}\right)$:

y'(-1) = -2.

⇒ Phương trình tiếp tuyến: $y = -2(x + 1) + \frac{7}{4}$ hay y = $y = -2x - \frac{1}{4}$

Bài 8 (trang 44 SGK Giải tích 12): Cho hàm số:

$$y = x^3 + (m + 3)x^2 + 1 - m \text{ (m là tham số)}$$

có đồ thị (C_m).

a) Xác định m để hàm số có điểm cực đại là x = -1.

b) Xác định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại x = -2.

Lời giải:

a) Xét hàm số $y = x^3 + (m + 3)x^2 + 1 - m$.

+ TXĐ : D = R.

+ $y' = 3x^2 + 2(m + 3).x$

⇒ $y'' = 6x + 2(m + 3)$.

+ Hàm số có điểm cực đại là x = -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(-1)=0 \\ y''(-1)<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2(m+3)=0 \\ -6+2(m+3)<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m-3=0 \\ 2m<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{-3}{2}.$$

Vậy với $m=\frac{-3}{2}$ thì hàm số có điểm cực đại là x = -1.

b) Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại x = -2

⇔ y(-2) = 0

⇔ $(-2)^3 + (m + 3)(-2)^2 + 1 - m = 0$

⇔ -8 + 4(m + 3) + 1 - m = 0

⇔ 3m + 5 = 0

⇔ m = -5/3

Bài 9 (trang 44 SGK Giải tích 12): Cho hàm số $y=\frac{(m+1)x-2m+1}{x-1}$ (m là tham số) có đồ thị (G).

a) Xác định m để đồ thị (G) đi qua điểm (0; -1).

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m tìm được.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị trên tại giao điểm của nó với trục tung.

Lời giải:

a) Đồ thị (G) đi qua điểm (0; -1)

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1).0-2m+1}{0-1}=-1$$

$$\Leftrightarrow 2m - 1 = -1$$

$$\Leftrightarrow m=0.$$

b) Với m = 0, hàm số trở thành: $y=\frac{x+1}{x-1}$

- TXĐ: D = R \ {1}

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y'=\frac{-2}{(x-1)^2}<0\ \forall x\in D$$

⇒ Hàm số nghịch biến trên (-∞; 1) và (1; +∞).

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x\to 1^-} y=-\infty;\ \lim_{x\to 1^+} y=+\infty.$$

⇒ x = 1 là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=1$$

⇒ y = 1 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

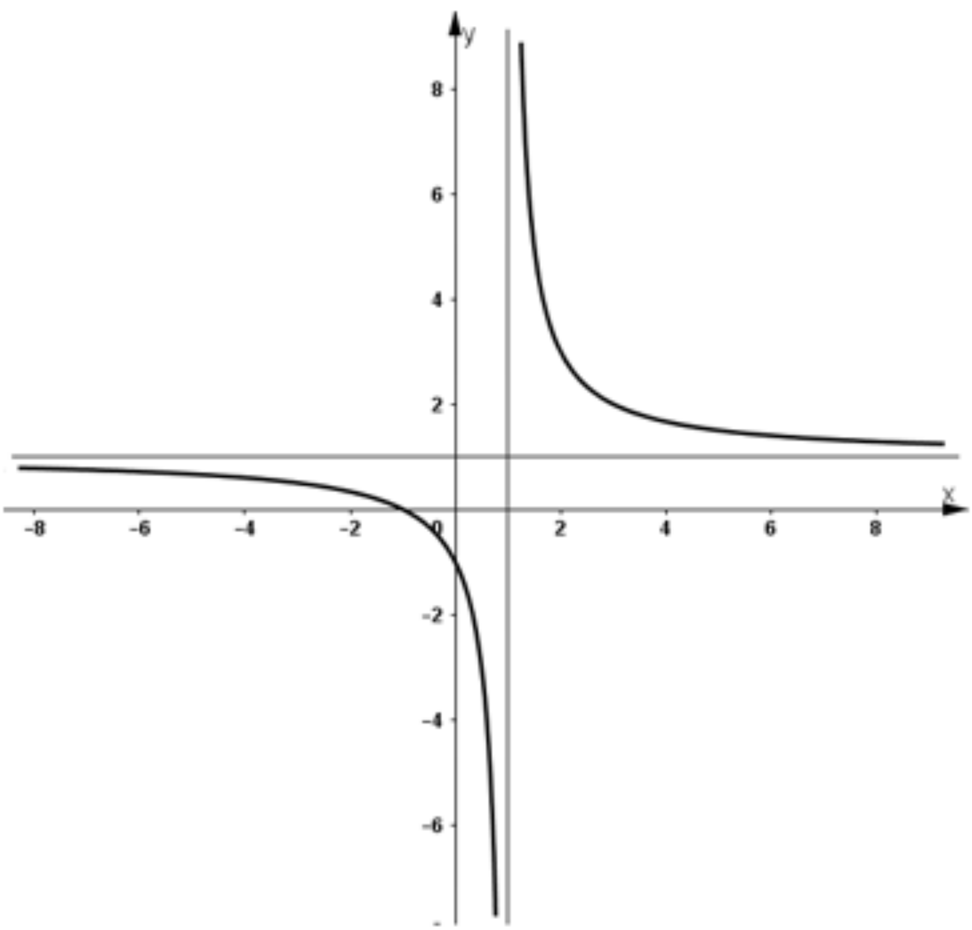
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

- Đồ thị:

+ Giao điểm với Ox: (-1; 0)

+ Giao điểm với Oy: (0; -1)



c) Đồ thị cắt trục tung tại điểm P(0;-1), khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm P(0; -1) là:

$y = y'(0).(x - 0) - 1$

hay $y = -2x - 1$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2x – 1$.