GIẢI TOÁN 12 BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

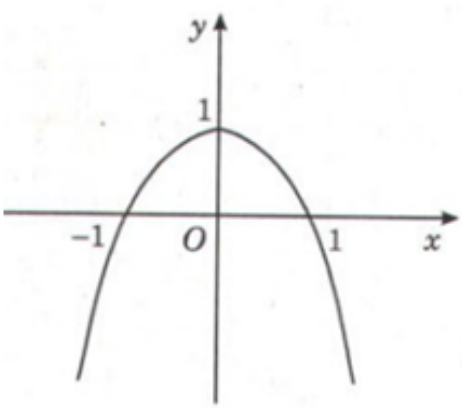
Trả lời câu hỏi SGK Toán 12 Bài 2: Cực trị của hàm số

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 2 trang 13:

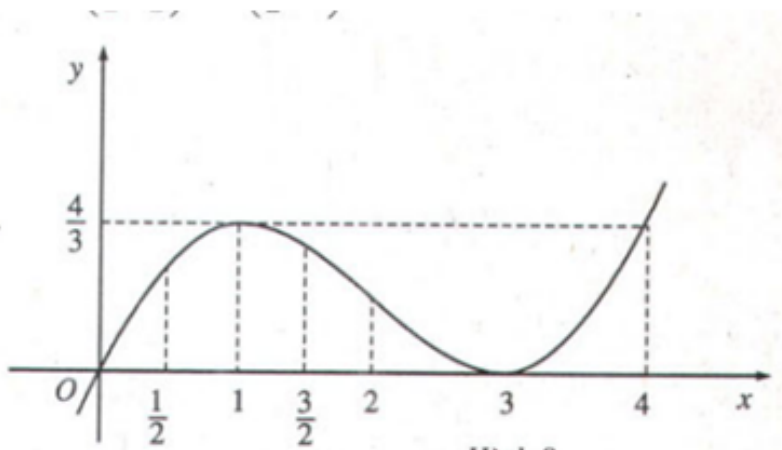
Dựa vào đồ thị (H.7, H.8), hãy chỉ ra các điểm tại đó mỗi hàm số sau có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất):

a) $y = -x^2 + 1$ trong khoảng $(-\infty; +\infty)$;

b) $y = x/3(x+ 3)^2$ trong các khoảng $(1/2; 3/2)$ và $(3/2; 4)$.



Hình 7



Hình 8

Lời giải:

a) Tại x = 0 hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.

Xét dấu đạo hàm:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y’		+	0	-	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

b) Tại x = 1 hàm số có giá trị lớn nhất bằng 4/3.

Tại x = 3 hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

Xét dấu đạo hàm:

x	$-\infty$		1		3		$-\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 2 trang 14:

Giả sử f(x) đạt cực đại tại x_o. Hãy chứng minh khẳng định 3 trong chú ý trên bằng cách xét giới hạn tỉ số $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ khi $\Delta x \to 0$ trong hai trường hợp $\Delta x > 0$ và $\Delta x < 0$.

Lời giải:

Với $\Delta x > 0$ Ta có:

Với $\Delta x < 0$ Ta có:

Vậy $f'(x_o) = 0$.

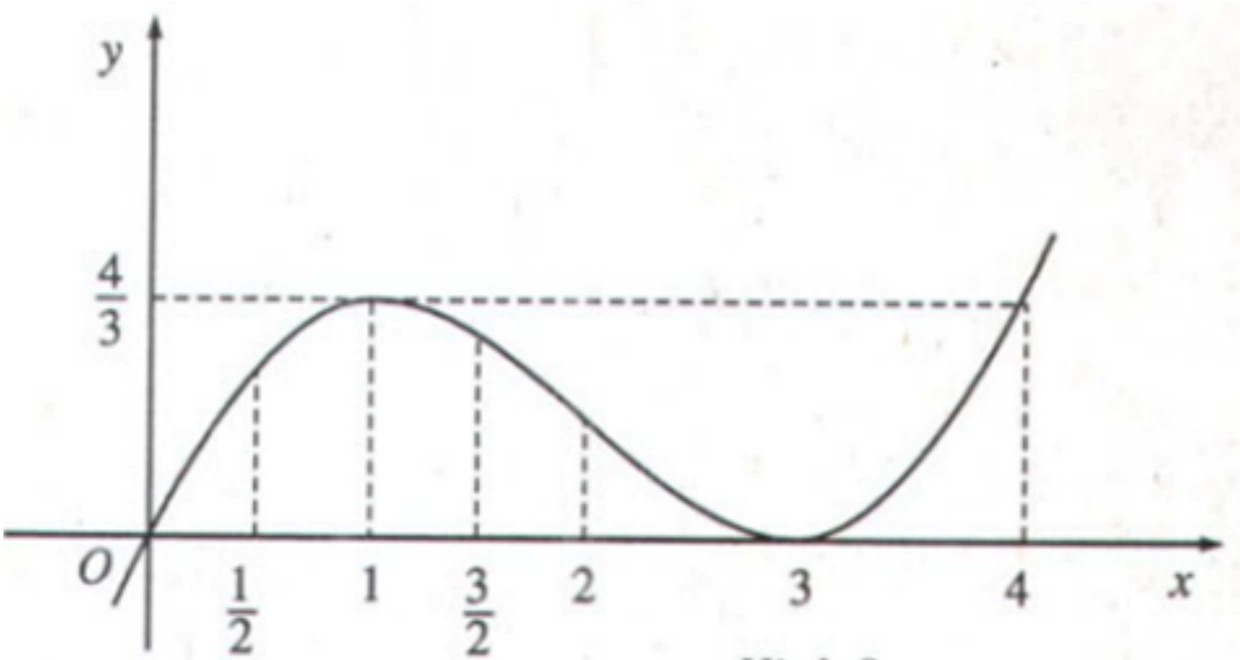
Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 2 trang 14:

a) Sử dụng đồ thị, hãy xem xét các hàm số sau đây có cực trị hay không.

• y = -2x + 1;

• $y = x/3(x-3)^2$ (H.8).

b) Nêu mối quan hệ giữa sự tồn tại cực trị và dấu của đạo hàm.



Hình 8

Lời giải:

a,Hàm số y = -2x + 1 không có cực trị.

Hàm số $y = x/3\ (x-3)^2$ đạt cực đại tại x = 1 và đạt cực tiểu tại x = 3.

b, Nếu hàm số có cực trị thì dấu của đạo hàm bên trái và bên phải điểm cực trị sẽ khác nhau.

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 2 trang 16:

Chứng minh hàm số y = |x| không có đạo hàm tại x = 0. Hàm số có đạt cực trị tại điểm đó không ?

Lời giải:

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}.$$

$$Khi\ đó\ y' = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \geq 0 \\ -1 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}.$$

$$Ta\ có \lim_{x\to 0^+} y' = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} y'$$

Vậy không tồn tại đạo hàm của hàm số tại x = 0.

Nhưng dựa vào đồ thị của hàm số y = |x|. Ta có hàm số đạt cực trị tại x = 0.

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 2 trang 16:

Áp dụng quy tắc I, hãy tìm các điểm cực trị của hàm s f(x) = $x(x^2 - 3)$.

Lời giải:

1. TXĐ: D = R

2. f'(x) = $3x^2 - 3$. Cho f'(x) = 0 ⇔ x = 1 hoặc x = -1.

3. Ta có bảng biến thiên:

x	-∞		- 1		1		-∞
y'		+	0	-	0	+	
y			2				+∞
	-∞				-2		

Hàm số đạt cực đại tại x = -1 và giá trị cực đại là 2

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 1 và giá trị cực tiểu là -2.

Giải bài tập Toán 12 Bài 2: Cực trị của hàm số

Bài 1 (trang 18 SGK Giải tích 12):

Áp dụng Quy tắc 1, hãy tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$;

c) y = x + 1/x

d) $y = x^3(1 - x)^2$;

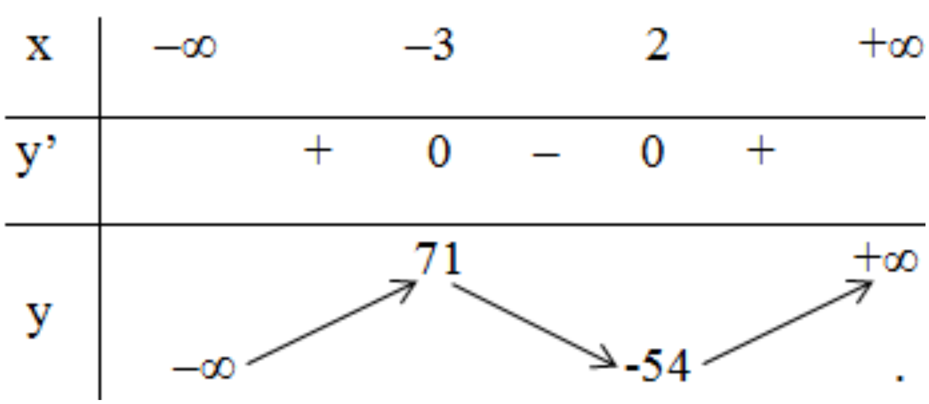
Lời giải:

a) TXĐ: D = R

$y' = 6x^2 + 6x - 36$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 2$

Bảng biến thiên:



Kết luận :

Hàm số đạt cực đại tại x = -3 ; $y_{CĐ} = 71$

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 2; $y_{CT} = -54$.

b) TXĐ: D = R

$y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1) = 0;$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại x = 0; $y_{CT} = -3$

hàm số không có điểm cực đại.

c) TXĐ: D = R \ {0}

$y' = 1.\ \ 1/x^2$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại x = -1; $y_{CĐ} = -2$;

hàm số đạt cực tiểu tại x = 1; $y_{CT} = 2$.

d) TXĐ: D = R

$y' = (x^3)'.(1 - x)^2 + x^3.[(1 - x)^2]'$

$= 3x^2.(1 - x)^2 + x^3.2(1 - x).(1 - x)'$

$= 3x^2(1 - x)^2 - 2x^3(1 - x)$

$= x^2.(1 - x)(3 - 5x)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x = 1$ hoặc $x = 3/5$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
y'		+	0	+	0	–	0	+	
y		↗		↗		↘		↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại x = 3/5

hàm số đạt cực tiểu tại $x_{CT} = 1$.

(Lưu ý: x = 0 không phải là cực trị vì tại điểm đó đạo hàm bằng 0 nhưng đạo hàm không đổi dấu khi đi qua x = 0.)

e) Tập xác định: D = R.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	
y		↘		↗	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại x = 1/2.

Bài 2 (trang 18 SGK Giải tích 12):

Áp dụng Quy tắc 2, hãy tìm các điểm cực trị của hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$;

b) $y = \sin 2x – x$

c) $y = \sin x + \cos x$;

d) $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$

Lời giải:

a) TXĐ: D = R.

+ $y' = 4x^3 - 4x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 – 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$.

+ $y'' = 12x^2 - 4$

$y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của hàm số.

$y''(1) = 8 > 0 \Rightarrow x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

$y''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow x = -1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

b) TXĐ: D = R

+ y' = 2cos2x – 1;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

+ y" = -4.sin2x

$$y''\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -4.\sin\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right)$$

$$= -2\sqrt{3} < 0 \text{ với } k \in Z.$$

⇒ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ (k ∈ Z) là các điểm cực đại của hàm số.

$$y''\left(\frac{-\pi}{6} + k\pi\right) = -4.\sin\left(\frac{-\pi}{3} + k2\pi\right)$$

$$= 2\sqrt{3} > 0 \text{ với } k \in Z$$

⇒ $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$ (k ∈ Z) là các điểm cực tiểu của hàm số.

c) TXĐ: D = R

+ y’ = cos x – sin x.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}.\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z).$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in Z)$$

+ y’’ = -sin x – cos x = $-\sqrt{2}.\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$y''\left(\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) = -\sqrt{2}.\cos(k.2\pi)$$

$$= -\sqrt{2} < 0$$

$\Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ là các điểm cực đại của hàm số.

$$y''\left(\frac{5\pi}{4} + k2\pi\right) = -\sqrt{2}.\cos(\pi + k2\pi)$$

$$= \sqrt{2} > 0$$

$\Rightarrow$ $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ là các điểm cực tiểu của hàm số.

d) TXĐ: D = R

+ $y' = 5x^4 - 3x^2 - 2$

$y' = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = \dfrac{-2}{5} (L) \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x = \pm 1.$

+ $y'' = 20x^3 - 6x$

$y''(-1) = -20 + 6 = -14 < 0$

$\Rightarrow x = -1$ là điểm cực đại của hàm số.

$y''(1) = 20 - 6 = 14 > 0$

$\Rightarrow x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Bài 3 (trang 18 SGK Giải tích 12): Chứng minh hàm số $y = \sqrt{|x|}$ không có đạo hàm tại $x = 0$ nhưng vẫn đạt được cực tiểu tại điểm đó.

Lời giải:

Hàm số có tập xác định D = R và liên tục trên R.

+ Chứng minh hàm số $y = f(x) = \sqrt{|x|}$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

Xét giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{-x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt{-x}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

⇒ Không tồn tại giới hạn

Hay hàm số không có đạo hàm tại x = 0.

+ Chứng minh hàm số đạt cực tiểu tại x = 0 (Dựa theo định nghĩa).

Ta có : f(x) > 0 = f(0) với ∀ x ∈ (-1 ; 1) và x ≠ 0

⇒ Hàm số y = f(x) đạt cực tiểu tại x = 0.

Bài 4 (trang 18 SGK Giải tích 12): Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số

$$y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$$

luôn luôn có một cực đại và một điểm cực tiểu.

Lời giải:

TXĐ: D = R

+ $y' = 3x^2 - 2mx – 2$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 – 2mx – 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{m-\sqrt{m^2+6}}{3} \\ x=\dfrac{m+\sqrt{m^2+6}}{3}\end{array}\right.$

+ y'' = 6x – 2m.

$$y''\left(\frac{m-\sqrt{m^2+6}}{3}\right)=-2\sqrt{m^2+6}<0$$

$\Rightarrow$ $x=\dfrac{m-\sqrt{m^2+6}}{3}$ là một điểm cực đại của hàm số.

$$y''\left(\frac{m+\sqrt{m^2+6}}{3}\right)=2\sqrt{m^2+6}>0$$

$\Rightarrow$ $x=\dfrac{m+\sqrt{m^2+6}}{3}$ là một điểm cực tiểu của hàm số.

Vậy hàm số luôn có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Bài 5 (trang 18 SGK Giải tích 12): Tìm a và b để các cực trị của hàm số

$$y=\frac{5}{3}a^2x^3+2ax^2-9x+b$$

đều là nhưng số dương và $x_o = -5/9$ là điểm cực đại.

Lời giải:

TXĐ: D = R.

+ y' = $5a^2x^2 + 4ax - 9$.

$\Rightarrow$ y'' = $10a^2x + 4a$.

- Nếu a = 0 thì y' = -9 < 0 với $\forall$ x $\in$ R

$\Rightarrow$ Hàm số không có cực trị (loại)

- Nếu a $\neq$ 0.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 5a^2x^2 + 4ax - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5.(ax)^2 + 4.ax - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax = 1 \\ ax = -\dfrac{9}{5} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{a} \\ x = \dfrac{-9}{5a} \end{array}\right..$$

$$f''\left(\frac{1}{a}\right) = 14a;\ f''\left(-\frac{9}{5a}\right) = -14a$$

+ TH1 : $x = \frac{1}{a}$ là điểm cực đại.

Khi đó: $\begin{cases} \frac{1}{a} = -\frac{5}{9} \\ 14a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{-9}{5}$.

$\Rightarrow x = \frac{-9}{5a}$ là điểm cực tiểu

Khi đó $y_{CĐ} = f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{80}{27} + b$;

$$y_{CT} = f\left(\frac{-9}{5a}\right) = \frac{-36}{5} + b.$$

Các cực trị của hàm số đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{80}{27} + b > 0 \\ \dfrac{-36}{5} + b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b > \dfrac{36}{5}.$$

$+$ TH2: $x = \dfrac{-9}{5a}$ là điểm cực đại

Khi đó: $\begin{cases} \dfrac{-9}{5a} = \dfrac{-5}{9} \\ -14a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \dfrac{81}{25}.$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{a}$ là điểm cực tiểu.

Khi đó $y_{CĐ} = f\left(\dfrac{-9}{5a}\right) = 4 + b$;

$y_{CT} = f\left(\dfrac{1}{a}\right) = \dfrac{-400}{243} + b$

Các cực trị của hàm số đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + b > 0 \\ \dfrac{-400}{243} + b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow b > \dfrac{400}{243}$$

Vậy $\begin{cases} a = \dfrac{-9}{5} \\ b > \dfrac{36}{5} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = \dfrac{81}{25} \\ b > \dfrac{400}{243} \end{cases}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 6 (trang 18 SGK Giải tích 12): Xác định giá trị của tham số m để hàm số m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt giá trị cực đại tại x = 2.

Lời giải:

TXĐ: D = R \ {-m}

$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m} = x + \frac{1}{x + m}$$

$$\Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x + m)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{(x + m)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + m)^2 = 1 \Leftrightarrow x = -m \pm 1$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-m-1$		$-m$		$-m+1$		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y		↗		↘	||	↘		↗	

Dựa vào BBT thấy hàm số đạt cực đại tại x = -m – 1.

Hàm số đạt cực đại tại x = 2 ⇔ -m – 1 = 2 ⇔ m = -3.

Vậy m = -3.