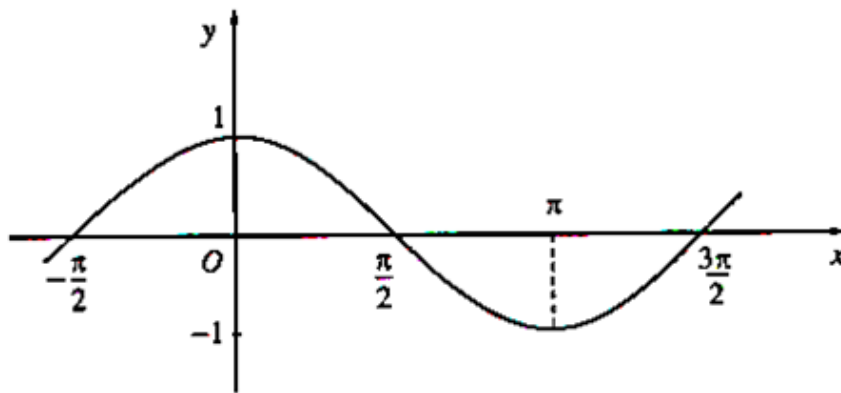


## GIẢI BÀI 1: SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ LỚP 12

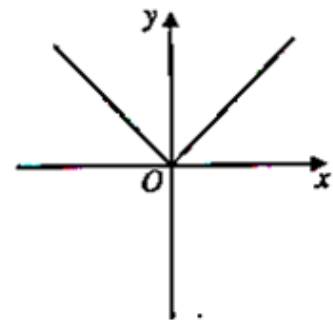
Trả lời câu hỏi SGK Bài: Hàm số đồng biến nghịch biến lớp 12

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 1 trang 4:

Từ đồ thị (H.1, H.2) hãy chỉ ra các khoảng tăng, giảm của hàm số  $y = \cos x$  trên đoạn  $[(-\pi)/2; 3\pi/2]$  và các hàm số  $y = |x|$  trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .



Hình 1



Hình 2

**Lời giải:**

- Hàm số  $y = \cos x$  trên đoạn  $[(-\pi)/2; 3\pi/2]$ :

Các khoảng tăng:  $[(-\pi)/2, 0]$ ,  $[\pi, 3\pi/2]$ .

Các khoảng giảm:  $[0, \pi]$ .

- Hàm số  $y = |x|$  trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$

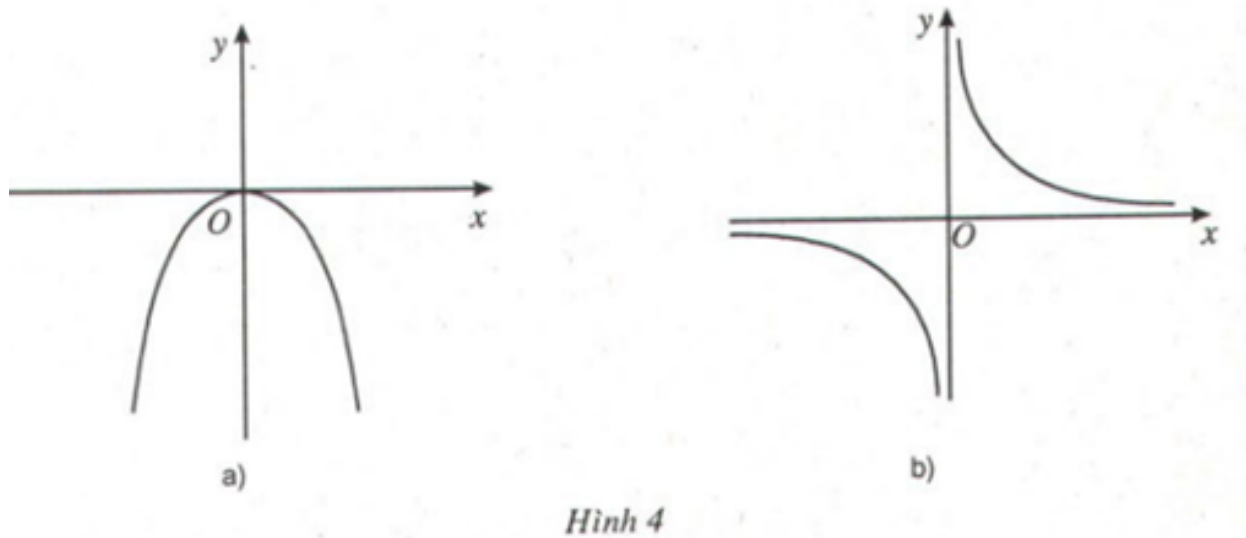
Khoảng tăng:  $[0, +\infty)$

Khoảng giảm  $(-\infty, 0]$ .

Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 1 trang 5:

Xét các hàm số sau và đồ thị của chúng:

a)  $y = -x^2/2$  (H.4a)      b)  $y = 1/x$  (H.4b)



Xét dấu đạo hàm của mỗi hàm số và điền vào bảng tương ứng.

**Lời giải:**

|      |           |   |           |
|------|-----------|---|-----------|
| x    | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $y'$ | +         | 0 | -         |
| y    | $-\infty$ | 0 | $-\infty$ |

|      |           |           |           |
|------|-----------|-----------|-----------|
| x    | $-\infty$ | 0         | $-\infty$ |
| $y'$ | -         |           | -         |
| y    | 0         | $+\infty$ | 0         |

**Trả lời câu hỏi Toán 12 Giải tích Bài 1 trang 7:**

Khẳng định ngược lại với định lí trên có đúng không? Nói cách khác, nếu hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K thì đạo hàm của nó có nhất thiết phải dương (âm) trên đó hay không?

**Lời giải:**

Xét hàm số  $y = x^3$  có đạo hàm  $y' = 3x^2 \geq 0$  với mọi số thực  $x$  và hàm số đồng biến trên toàn bộ  $\mathbb{R}$ . Vậy khẳng định ngược lại với định lý trên chưa chắc đúng hay nếu hàm số đồng biến (nghịch biến) trên  $K$  thì đạo hàm của nó không nhất thiết phải dương (âm) trên đó.

**Giải bài tập sự đồng biến nghịch biến của hàm số SGK Toán 12**

**Bài 1 (trang 9 SGK Giải tích 12):**

Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a)  $y = 4 + 3x - x^2$

b)  $y = 1/3 \cdot x^3 + 3x^2 - 7x - 2$

c)  $y = x^4 - 2x^2 + 3$

d)  $y = -x^3 + x^2 - 5$

**Lời giải:**

a) Tập xác định :  $D = \mathbb{R}$

$y' = 3 - 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$

Ta có bảng biến thiên:

|           |           |                |           |
|-----------|-----------|----------------|-----------|
| <b>x</b>  | $-\infty$ | $\frac{3}{2}$  | $+\infty$ |
| <b>y'</b> | +         | 0              | -         |
| <b>y</b>  | $-\infty$ | $\frac{25}{4}$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng  $(-\infty; 3/2)$  và nghịch biến trong khoảng  $(3/2; +\infty)$ .

b) Tập xác định :  $D = \mathbb{R}$

$$y' = x^2 + 6x - 7$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -7 \text{ hoặc } x = 1$$

Ta có bảng biến thiên:

|    |           |                          |                          |                    |   |
|----|-----------|--------------------------|--------------------------|--------------------|---|
| x  | $-\infty$ | -7                       | 1                        | $+\infty$          |   |
| y' | +         | 0                        | -                        | 0                  | + |
| y  | $-\infty$ | $\nearrow \frac{239}{3}$ | $\searrow -\frac{17}{3}$ | $\nearrow +\infty$ |   |

Vậy hàm số đồng biến trong các khoảng  $(-\infty ; -7)$  và  $(1 ; +\infty)$ ; nghịch biến trong khoảng  $(-7 ; 1)$ .

c) Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 4x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x.(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

|    |           |    |   |   |           |
|----|-----------|----|---|---|-----------|
| x  | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
| y' | -         | 0  | + | 0 | +         |
| y  |           |    |   |   |           |

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng  $(-\infty ; -1)$  và  $(0 ; 1)$ ; đồng biến trong các khoảng  $(-1 ; 0)$  và  $(1 ; +\infty)$ .

d) Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$

$$y' = -3x^2 + 2x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

|    |           |   |               |           |   |
|----|-----------|---|---------------|-----------|---|
| x  | $-\infty$ | 0 | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |   |
| y' | -         | 0 | +             | 0         | - |
| y  |           |   |               |           |   |

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng  $(-\infty ; 0)$  và  $(2/3 ; +\infty)$ , đồng biến trong khoảng  $(0 ; 2/3)$ .

**Bài 2 (trang 10 SGK Giải tích 12):** Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số:

a)  $y = \frac{3x + 1}{1 - x}$  ;

b)  $y = \frac{x^2 - 2x}{1 - x}$  ;

c)  $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$  ;

d)  $y = \frac{2x}{x^2 - 9}$ .

**Lời giải:**

a) Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$y = -3 + \frac{4}{1 - x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4}{(1 - x)^2} > 0 \forall x \in D.$$

$y'$  không xác định tại  $x = 1$

Bảng biến thiên:

|    |           |           |           |
|----|-----------|-----------|-----------|
| x  | $-\infty$ | 1         | $+\infty$ |
| y' | +         |           | +         |
| y  | $-3$      | $+\infty$ | $-3$      |

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

b) Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{(2x - 2)(1 - x) + (x^2 - 2x)}{(1 - x)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 2x - 2}{(1 - x)^2}$$

$y' < 0$  với  $\forall x \in D$  (vì  $-x^2 + 2x - 2 < 0$ ).

$y'$  không xác định tại  $x = 1$

Bảng biến thiên:

|    |           |           |           |
|----|-----------|-----------|-----------|
| x  | $-\infty$ | 1         | $+\infty$ |
| y' | -         |           | -         |
| y  | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$

c) Tập xác định:  $D = (-\infty; -4] \cup [5; +\infty)$

$$y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-20}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \notin D.$$

$y'$  không xác định tại  $x = -4$  và  $x = 5$

Bảng biến thiên:

|      |                     |    |               |                     |           |
|------|---------------------|----|---------------|---------------------|-----------|
| x    | $-\infty$           | -4 | $\frac{1}{2}$ | 5                   | $+\infty$ |
| $y'$ | -                   |    | 0             |                     | +         |
| y    | $+\infty$<br>↘<br>0 |    |               | 0<br>↗<br>$+\infty$ |           |

Vậy hàm số nghịch biến trong khoảng  $(-\infty; -4)$ ; đồng biến trong khoảng  $(5; +\infty)$ .

d) Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$

$$y' = \frac{2 \cdot (x^2 - 9) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2 + 9)}{(x^2 - 9)^2}$$

$$\text{Vì } x^2 \geq 0 \forall x \Rightarrow x^2 + 9 > 0 \forall x \Leftrightarrow -2(x^2 + 9) < 0$$

$$\text{Mà } (x^2 - 9)^2 > 0 \forall x \in D$$

Suy ra:  $y' < 0$  với  $\forall x \in D$ .

$y'$  không xác định tại  $x = \pm 3$



Bảng biến thiên:

|    |           |   |           |   |           |   |           |
|----|-----------|---|-----------|---|-----------|---|-----------|
| x  | $-\infty$ |   | -3        |   | 3         |   | $+\infty$ |
| y' |           | - |           | - |           | - |           |
| y  | 0         |   | $-\infty$ |   | $-\infty$ |   | 0         |

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng  $(-\infty ; -3)$ ;  $(-3; 3)$  và  $(3; +\infty)$ .

**Bài 3 (trang 10 SGK Giải tích 12):** Chứng minh rằng hàm số

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

trên khoảng  $(-1; 1)$ , nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty)$ .

**Lời giải:**

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

+ Hàm số nghịch biến

$$\Leftrightarrow y' < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty ; -1) \cup (1; +\infty).$$

+ Hàm số đồng biến

$$\Leftrightarrow y' > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1; 1).$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$  và nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty)$ .

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

**Bài 3 (trang 10 SGK Giải tích 12):** Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$ , nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty)$ .

**Lời giải:**

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

$$y' = \frac{(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

+ Hàm số nghịch biến

$$\Leftrightarrow y' < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

+ Hàm số đồng biến

$$\Leftrightarrow y' > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow x \in (-1; 1).$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$  và nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty)$ .

$$y = \sqrt{2x - x^2}$$

**Bài 4 (trang 10 SGK Giải tích 12):** Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$ , nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

**Lời giải:**

TXĐ:  $D = [0; 2]$

$$y' = \frac{2 - 2x}{2\sqrt{2x - x^2}} = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

+ Hàm số đồng biến

$$\Leftrightarrow y' > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

+ Hàm số nghịch biến

$$\Leftrightarrow y' < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 1)$ , nghịch biến trên khoảng  $(1; 2)$ .

**Bài 5 (trang 10 SGK Giải tích 12):** Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\text{a) } \tan x > x \quad \left( 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{b) } \tan x > x + \frac{x^3}{3} \quad \left( 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

**Lời giải:**

a) Xét hàm số  $y = f(x) = \tan x - x$  trên khoảng  $(0; \pi/2)$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x > 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$  hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; \pi/2)$

$$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \text{ với } \forall x > 0$$

hay  $\tan x - x > 0$  với  $\forall x \in (0; \pi/2)$

$\Leftrightarrow \tan x > x$  với  $\forall x \in (0; \pi/2)$  (đpcm).

b) Xét hàm số  $y = g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$  trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 \\ &= \tan^2 x - x^2 \end{aligned}$$

Theo kết quả câu a):  $\tan x > x \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow g'(x) > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow y = g(x)$  đồng biến trên  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow g(x) > g(0) = 0 \text{ với } \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan x - x - \frac{x^3}{3} > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan x > x + \frac{x^3}{3} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right).$$