

Năm học 2020 - 2021

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (2,0 điểm): Cho hai biểu thức  $A = \left( \frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) : \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$  và  $B = \frac{x+3}{3+\sqrt{x}}$

với  $x \geq 0, x \neq 9$ .

- 1) Tính giá trị của  $B$  khi  $x = 25$ ;
- 2) Rút gọn biểu thức  $A$ ;
- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của  $P = B : A$ .

Bài 2 (2,5 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Cho một hình chữ nhật. Nếu tăng chiều dài lên 10 m, tăng chiều rộng lên 5 m thì diện tích tăng  $500m^2$ . Nếu giảm chiều dài 15 m và giảm chiều rộng 9 m thì diện tích giảm  $600m^2$ . Tính chiều dài, chiều rộng ban đầu.

2) Một hình nón có bán kính đáy bằng 5 cm và diện tích xung quanh là  $65\pi cm^2$ . Tính thể tích của khối nón đó.

Bài 3 (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình sau:  $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$
- 2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) có phương trình:  $y = x^2$  và đường thẳng (d) có phương trình  $y = 2mx - 2m + 3$  (m là tham số)
  - a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) nhau tại hai điểm phân biệt với mọi m.
  - b) Gọi  $A(x_1; y_1)$  và  $B(x_2; y_2)$  là giao điểm của (d) và (P). Tìm m để  $y_1 + y_2 < 30$

Bài 4 (3,0 điểm)

Cho  $\Delta ABC$  nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M và N.

- 1) Chứng minh Tứ giác BEDC nội tiếp;
- 2) Chứng minh  $DE \parallel MN$  và  $OA \perp DE$ ;
- 3) Khi BC và (O) cố định. Chứng minh rằng khi A chuyển động trên cung lớn BC sao cho  $\Delta ABC$  là tam giác nhọn thì bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ADE$  không đổi.

Bài 5 (0,5 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn  $a + b + c = 1$ , tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2}$$

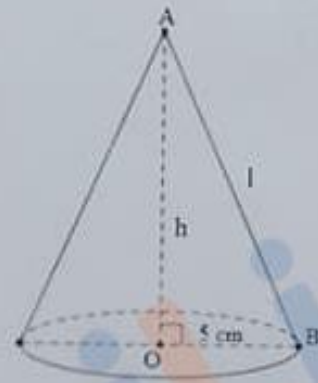
Chúc em làm bài tốt!

$$P = \frac{1}{3} \text{ sđ.h}$$

$$\frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

TKL

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
1	1 0,5 đ	Với $x = 25$ thỏa mãn điều kiện xác định $x \geq 0$ Thay $x = 25$ vào biểu thức B ta được $B = \frac{25+3}{3+\sqrt{25}} = \frac{28}{3+5} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$	0,25
		Vậy khi $x = 25$ thì $B = \frac{7}{2}$	0,25
	2 1 đ	Điều kiện xác định: $x \geq 0, x \neq 9$ . $A = \left( \frac{x+3\sqrt{x}-2}{x-9} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) : \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$ $= \left( \frac{x+3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) : \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$ $= \frac{x+3\sqrt{x}-2-(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} : \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$ $= \frac{x+3\sqrt{x}-2-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}}$ $= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}}$ $= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}}$ $= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$	0,25 0,25 0,25
Kết luận ..	0,25		
3 0,5 đ	$P = B : A = \frac{x+3}{3+\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}} = \frac{x+3}{\sqrt{x+1}}$ $= \sqrt{x+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}} - 2$ Áp dụng bất đẳng thức cosi với hai số dương, ta có: $\sqrt{x+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x+1}) \cdot \frac{4}{\sqrt{x+1}}} = 4$ $\Rightarrow \sqrt{x+1} + \frac{4}{\sqrt{x+1}} - 2 \geq 4 - 2$ hay $P \geq 2$ Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$ (thỏa mãn ĐKXD) Vậy $P = 2$ là nhỏ nhất khi $x = 1$ .	0,25	
2	1	Gọi chiều dài và chiều rộng ban đầu lần lượt là: $x$ (m) và $y$ (m) (đk $x > 15, y > 9$ )	0,25

2,0 đ	<p>⇒ Diện tích của hên là <math>xy</math> (<math>m^2</math>)  Tăng chiều dài lên 10 m, tăng chiều rộng lên 5 m thì diện tích tăng <math>500m^2</math>  <math>\Rightarrow (x+10)(y+5) - xy = 500</math> (1)</p> <p>Giảm chiều dài 15 m và giảm chiều rộng 9 m thì diện tích giảm <math>600m^2</math>  <math>\Rightarrow xy - (x-15)(y-9) = 600</math> (2)</p> <p>Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:  <math display="block">\begin{cases} (x+10)(y+5) - xy = 500 \\ xy - (x-15)(y-9) = 600 \end{cases}</math></p> <p>Giải đúng <math>\begin{cases} x = 40 \\ y = 25 \end{cases}</math></p> <p>Với <math>x = 40, y = 25</math> thỏa mãn đk  Vậy chiều dài hình chữ nhật là 40m, chiều rộng là 25 m</p>	0,25 0,25 0,25 0,25 0,5
2 0,5 đ	 <p>Ta có: <math>S_{\text{v}} = \pi r l \Leftrightarrow \pi \cdot 5 l = 65\pi \Rightarrow l = 13</math> cm.</p> <p>Áp dụng định lý Pytago cho <math>\Delta OAB</math> vuông tại <math>O</math> có:  <math>AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow 13^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12</math> cm</p> <p>Vậy thể tích khối nón là: <math>V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi</math> (<math>cm^3</math>).</p>	0,25 0,25
3 1 0,75 đ	<p><math>(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0</math> (1)  Đặt <math>x^2 + 2x = t</math>  (1) <math>\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0</math>  Do <math>a - b + c = 1 - (-2) + (-3) = 0</math>  <math>t_1 = -1, t_2 = 3</math>  + Nếu <math>t = -1 \Rightarrow x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0</math>  Giải đúng Pt có nghiệm kép <math>x = -1</math>  + Nếu <math>t = 3 \Rightarrow x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0</math>  Do <math>a + b + c = 1 + 2 + (-3) = 0</math> pt có hai nghiệm <math>x = 1</math> hoặc <math>x = -3</math>  Kết luận.....</p>	0,25 0,25 0,25
2 1,25 đ	<p>Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)  <math>x^2 = 2mx - 2m + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0</math> (*)</p> <p>Ta có: <math>\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (2m - 3) = m^2 - 2m + 3 = (m - 1)^2 + 2</math>.</p> <p>Do <math>(m - 1)^2 + 2 &gt; 0 \forall m</math> nên <math>\Delta' &gt; 0 \forall m</math>. Hay pt (*) luôn có 2 nghiệm</p>	0,25

		<p>phân biệt với mọi <math>m</math></p> <p>Chúng tỏ: <math>(P)</math> và <math>(d)</math> luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của <math>m</math>.</p>	0,25
		<p>b) Vì <math>A(x_1; y_1)</math> và <math>B(x_2; y_2)</math> là giao điểm của <math>(d)</math> và <math>(P)</math>  <math>\Rightarrow y_1 = x_1^2</math> và <math>y_2 = x_2^2</math></p> <p>mà theo hệ thức Vi-ét ta có: <math>\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m - 3 \end{cases}</math></p> <p>khi đó <math>y_1 + y_2 &lt; 30 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 &lt; 30 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 &lt; 30</math>  <math>\Leftrightarrow (2m)^2 - 2(2m - 3) &lt; 30</math>  <math>\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 6 &lt; 30</math>  <math>\Leftrightarrow (2m - 1)^2 &lt; 25</math>  <math>\Leftrightarrow  2m - 1  &lt; 5</math>  <math>\Leftrightarrow -5 &lt; 2m - 1 &lt; 5</math>  <math>\Leftrightarrow -4 &lt; 2m &lt; 6</math>  <math>\Leftrightarrow -2 &lt; m &lt; 3</math></p> <p>Vậy với <math>-2 &lt; m &lt; 3</math> thỏa mãn yêu cầu bài toán</p>	0,25 0,25 0,25
4	1 1 đ		
		Vẽ hình đến câu a	0,25
		<p>1) Chứng minh đúng tứ giác <math>BCDE</math> nội tiếp</p> <p>Ta có <math>BD \perp AC</math> (<math>BD</math> là đường cao của <math>\Delta ABC</math>)  <math>\Rightarrow \widehat{BDC} = 90^\circ</math></p> <p>Chứng minh tương tự: <math>CE \perp AB \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ</math>  <math>\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ</math>  <math>\Rightarrow D</math> và <math>E</math> cùng thuộc đường tròn đường kính <math>BC</math> hay tứ giác <math>BEDC</math> nội tiếp.</p>	0,25 0,25
	2 1,5 đ	<p>2) Chứng minh <math>DE \parallel MN</math> và <math>OA \perp DE</math>;</p> <p>+ Vì tứ giác <math>BEDC</math> nội tiếp nên <math>\widehat{DEC} = \widehat{DBC}</math> (2 góc nội tiếp cùng chắn <math>\widehat{DC}</math>) hay <math>\widehat{DEC} = \widehat{MBC}</math></p>	0,25 0,25

mà  $\widehat{MNC} = \widehat{MBC}$  (Hai góc nội tiếp cùng chắn  $\widehat{MC}$  của  $(O)$ )  
 nên  $\widehat{DEC} = \widehat{MNC}$  Mà chúng ở vị trí đồng vị  
 $\Rightarrow MN \parallel DE$  ( dấu hiệu nhận biết 2 đường thẳng song song)  
 + mặt khác do tứ giác  $BEDC$  nội tiếp  $\widehat{EBD} = \widehat{ECD}$  ( 2 góc nội tiếp cùng chắn  $\widehat{DE}$ )  
 hay  $\widehat{ABM} = \widehat{ACN} \Rightarrow Sđ \widehat{AM} = Sđ \widehat{AN}$  ( 2 góc nội tiếp bằng nhau thì chắn các cung bằng nhau)  
 $\Rightarrow AM = AN$   
 Mà  $OM = ON$   
 do đó  $OA$  là trung trực của  $MN$  hay  $OA \perp MN$   
 mà  $MN \parallel DE$  ( cmt)  
 nên  $OA \perp DE$

3  
0,5 đ  
3) Khi  $BC$  và  $(O)$  cố định. Chứng minh rằng khi  $A$  chuyển động trên cung lớn  $BC$  sao cho  $\triangle ABC$  là tam giác nhọn thì bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ADE$  không đổi.

- Vẽ đường kính  $AF$  của  $(O)$   
 $\widehat{ACF} = 90^\circ \Rightarrow FC \perp AC$  Mà  $BH \perp AC$  (gt)  
 $\Rightarrow FC \parallel BH$   
 Cmtt:  $BF \parallel CH$   
 nên  $BHFC$  là hình bình hành.  
 Gọi  $BC$  giao với  $HF$  tại  $I$   
 $\Rightarrow I$  là trung điểm của  $BC$  và  $HF$   
 $\Rightarrow OI$  là đường trung bình của  $\triangle AHF$   
 $\Rightarrow AH = 2OI$   
 Do  $BC$  cố định,  $O$  cố định  $\Rightarrow OI$  không đổi  
 $\Rightarrow AH$  không đổi  
 mà 4 điểm  $A, E, H, D$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $AH$   
 Vậy bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $\triangle ADE$  không đổi.

5

0,5 đ

$$\frac{a}{1+9b^2} = a - \frac{9ab^2}{1+9b^2} \geq a - \frac{3}{2}ab$$

$$\frac{b}{1+9c^2} = b - \frac{9bc^2}{1+9c^2} \geq b - \frac{3}{2}bc$$

$$\frac{c}{1+9a^2} = c - \frac{9ca^2}{1+9a^2} \geq c - \frac{3}{2}ac$$

$$P = \frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2} \geq (a+b+c) - \frac{3}{2}(ab+bc+ca)$$

$$\text{Do } \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca \Rightarrow \frac{1}{3} \geq ab+bc+ca$$

$$\Rightarrow P \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi  $a=b=c=\frac{1}{3}$

Kết luận .....

0,25